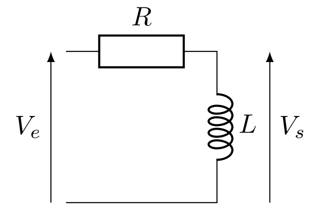
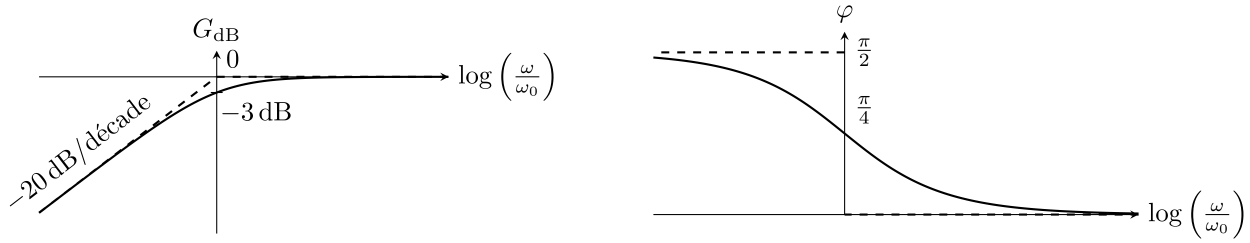
TD7 : Filtrage linéaire – corrigé

Exercice 1 : Filtre RL

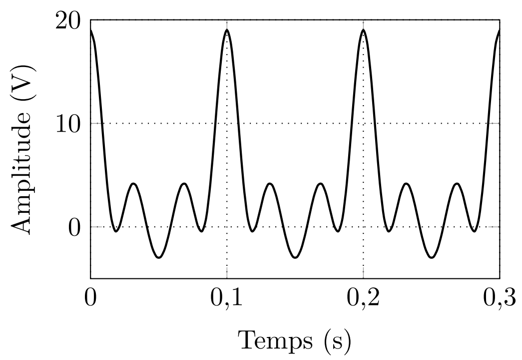
1. 

2. À basses fréquences, la bobine se comporte comme un fil, la tension de sortie est alors nulle. À hautes fréquences, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert et la tension de sortie est égale à la tension d'entrée. C'est donc un filtre passe-haut.
3. On remarque qu'il s'agit d'un pont diviseur de tension et on obtient directement :
$$\underline{H}(\omega) = \frac{Z_L}{Z_R + Z_L} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}$$
4. En notant $\omega_0 = \frac{R}{L}$, la fonction de transfert s'écrit :
$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}} \quad \text{donc} \quad G_{\text{dB}} = -10\log\left(1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right) \quad \text{et} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$
On obtient le diagramme de Bode suivant :


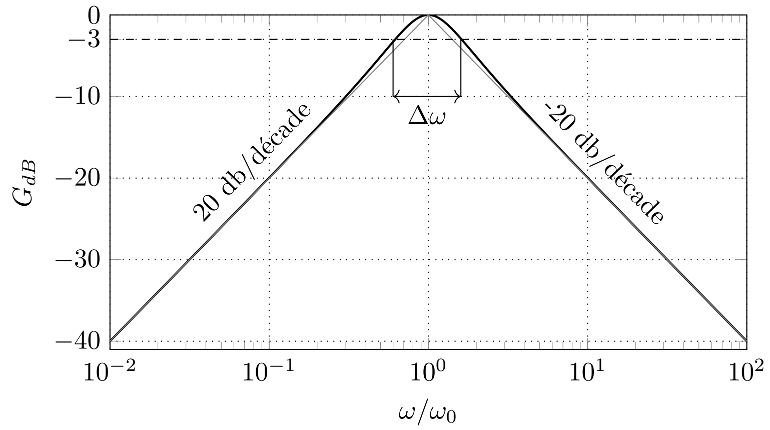
5. Si $G_{\text{dB}} = -3\,\text{dB}$ alors $|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{2}$ et $\omega = \omega_0$. Donc la pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$ est $\omega_0 = \frac{R}{L}$.

Exercice 2 : Spectre d'un signal périodique

1. La valeur moyenne vaut 4 V
2. La fréquence fondamentale est 10 Hz
3. — Harmonique 1 (fondamentale) : f=10 Hz ; A=6 V
   — Harmonique 2 : f=20 Hz ; A=3 V
   — Harmonique 3 : f=30 Hz ; A=5 V
   — Harmonique 4 : f=40 Hz ; A=1 V
4. Allure du signal ci-contre.



Exercice 3 : Diagramme de Bode

1. Il s'agit d'un filtre passe-bande car $|\underline{H}(\omega \to 0)| = 0$ et $|\underline{H}(\omega \to \infty)| = 0$
2. On calcule $G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log\left(|\underline{H}(\omega)|\right) = -10\log\left(1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)$
3. — Lorsque $\omega \to 0$, $G_{\text{dB}}(\omega) \simeq -20\log(Q\omega_0) + 20\log(\omega)$, ce qui correspond à une pente de 20dB/décade
   — Lorsque $\omega \to \infty$, $G_{\text{dB}}(\omega) \simeq -20\log(Q/\omega_0) - 20\log(\omega)$, ce qui correspond à une pente de -20dB/décade.
   — On a également $G_{\text{dB}}(\omega = \omega_0) = 0$
4.
5. Diagramme de Bode tracé avec $Q = 1$:


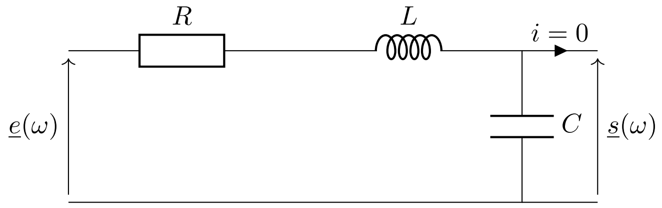
6. On cherche ω_1 et ω_2 telles que $G(\omega_1) = G(\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On trouve que $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ (fait dans le cours)

Exercice 4 : Filtre moyenneur

1. La fonction de transfert est celle d'une filtre passe-bas ($\lim_{\omega\to\infty} |\underline{H}(\omega)| = 0$ et $|\underline{H}(0)| = 1$. Donc la tension est prise aux bornes du condensateur (il se comporte comme un fil pour $\omega \to \infty$).
2. Pour réaliser un filtre moyenneur, il faut transmettre la composante continue du signal et éliminer toutes les autres.
3. On veut une atténuation de $40\,\text{dB}$ à $f_0 = 1\,\text{kHz}$ et on peut écrire la fonction de transfert sous la forme :
$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_c}}$$
donc on a :
$$-20\log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{f_0}{f_c}\right)^2}\right) = -40 \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{f_0}{f_c}\right)^2 = 10^4 \Leftrightarrow f_c = \frac{f_0}{\sqrt{10^4 - 1}} \approx 10\,\text{Hz}$$
Avec $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$ on trouve $R \approx 16\,\text{k}\Omega$
4. Le signal donné comporte une composante continue de $2\,\text{V}$ et une composante alternative de fréquence fondamentale $f_0 = 1\,\text{kHz}$. Le filtre que l'on étudie élimine complètement tout ce qui a une fréquence supérieure à $1\,\text{kHz}$. Il ne restera plus que la composante continue et le signal de sortie sera $u_s(t) = 2\,\text{V}$.
5. Ce filtre se comporte comme un intégrateur si $f \gg f_c$. Car dans ce cas, la fonction de transfert devient $\underline{H}(\omega) = \frac{\omega_c}{j\omega}$.
6. Dans ce cas, le signal est composé d'une composante continue de $2\,\text{V}$ et d'harmoniques dont la fréquence est un multiple entier de $1\,\text{kHz}$. Le filtre élimine alors toute les harmoniques et ne laisse passer que la composante continue, il se comporte comme un moyenneur. En sortie on observe une tension constante de $2\,\text{V}$.
7. Lorsque l'oscilloscope est en mode AC, le signal mesuré passe par un filtre passe-haut qui coupe la composant continue du signal. Comme le signal mesuré est continu, l'oscilloscope affiche une tension continue de $0\,\text{V}$.
8. Le signal carré ayant une fréquence bien supérieure à la fréquence de coupure du filtre $f \gg f_c$, ce dernier se comporte comme un intégrateur. Or l'intégrale d'un signal carré est un signal triangulaire.

Exercice 5 : Filtre inconnu

1. Il s'agit d'un filtre *pass-bas* car le gain aux hautes fréquences tend vers 0.
2. La pulsation propre du filtre est la pulsation à laquelle on observe la résonance $\omega_0 \approx 800\,\text{rad/s}$.
3. Autour de ω_0 il se produit un phénomène de résonance, l'amplitude du signal de sortie est supérieurs à celle du signal d'entrée. La valeur de Q la plus probable est $Q = 10$ car à $\omega = \omega_0$. La tension de sortie est 10 fois plus grande que la tension d'entrée ($G_{\text{dB}} = 20$).
4. On fabrique un circuit RLC série et on prend la sortie aux bornes du condensateur :



Pour déterminer les valeurs des composants, on utilise les expressions de ω_c et Q (cours sur l'oscillateur harmonique amorti).

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

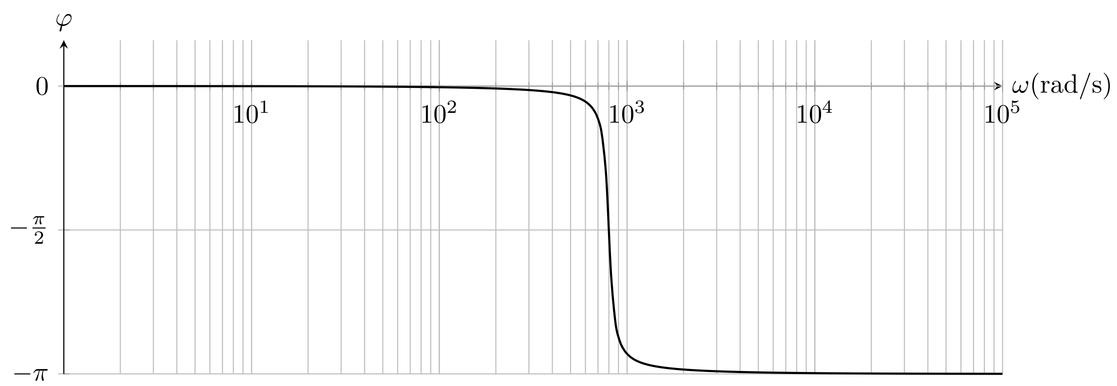
On a donc $\frac{1}{\sqrt{LC}} = 800$ et $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 10$. On peut prendre $R = 10\,\Omega$, $C = \frac{1}{RQ\omega_c} \approx 12\,\mu\text{F}$, $L = \frac{1}{C\omega_c^2} \approx 125\,\text{mH}$

5. On commence par déterminer la fonction de transfert de ce filtre (voir cours), on trouve

$$\underline{H}(\omega) = \frac{Z_C}{Z_C + Z_L + Z_R} = \frac{1/jC\omega}{R + j(L\omega - 1/C\omega)} = \frac{1}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} + j\frac{\omega}{\omega_c Q}}.$$

La phase de la fonction de transfert est :

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-j}{\frac{\omega}{Q\omega_c} - j\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)}\right) = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(Q\left(\frac{\omega_c}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_c}\right)\right)$$



Exercice 6 : Un filtre particulier

1. On utilise la formule du pont diviseur de tension pour déterminer la tension $\underline{u}_C$ aux bornes du condensateur du bas et $\underline{u}_R$ aux bornes de la résistance du haut. On a

$$\underline{u}_C = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega}\underline{e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}\underline{e} \quad \text{et} \quad \underline{u}_R = \frac{R}{R + 1/jC\omega}\underline{e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}\underline{e} \tag{1}$$

Avec la loi des mailles, on a $\underline{u}_C + \underline{s} - \underline{u}_R = 0$ donc

$$\boxed{\underline{u}_s = \underline{u}_R - \underline{u}_C = \frac{jRC\omega - 1}{jRC\omega + 1}\underline{e} \quad \text{et} \quad \underline{H}(\omega) = \frac{jRC\omega - 1}{jRC\omega + 1}} \tag{2}$$

2. On montre facilement que $|\underline{H}(\omega)| = 1$ pour toutes les fréquences donc le filtre n'a pas d'effet sur l'amplitude du signal. Par contre on a

$$\arg(\underline{H}(\omega)) = \pi + \arctan(-RC\omega) - \arctan(RC\omega) = \pi - 2\arctan(RC\omega) \tag{3}$$

Le filtre ne modifie donc que la phase du signal, c'est un déphaseur.

3. Il faut que $RC\omega = 1$, donc on doit avoir $RC = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{2\pi f}$. Pour $f = 1\,\text{kHz}$, on peut par exemple choisir $\boxed{\text{R=1 k}\Omega}$ et $\boxed{C = 0{,}159\,\mu\text{F}}$.

Exercice 7 : Filtrage d'un signal

1. On cherche la fréquence de la composante fondamentale de $y(t)$. C'est la composante correspondant à $n = 0$, soit le terme en $\sin(\pi t/\tau)$. Par identification avec $\sin(\omega t)$, on en conclut que $\omega = \pi/\tau = 2\pi f$. Soit $\boxed{f = \frac{1}{2\tau}}$ et $\boxed{T = 2\tau}$
2. L'équation donnée pour la décomposition de $y(t)$ ne fait intervenir que des harmoniques d'ordre impair. On en conclut directement que $a_p = 0$ si p est pair. Une harmonique d'ordre impair s'écrit

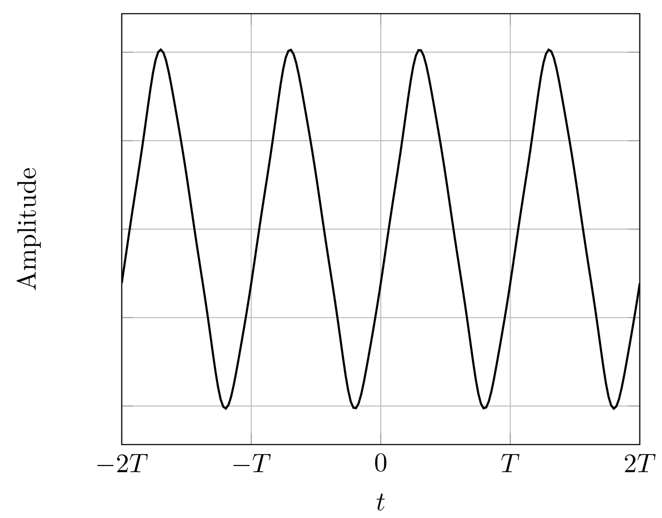
$$\begin{aligned}
y_{2n+1}(t) &= \frac{8}{\pi^2}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(2\pi(2n+1)ft) &(1)\\
&= \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{(2n+1)^2}\sin((-1)^n 2\pi(2n+1)ft) &(2)\\
&= \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left(2\pi(2n+1)ft - (-1)^n\frac{\pi}{2}\right) &(3)\\
&= \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left(2\pi(2n+1)ft + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2}\right) &(4)
\end{aligned}$$

On a donc pour $p = 2n+1$ impair, $\boxed{a_p = \frac{8}{\pi^2 p^2}}$ et $\boxed{\varphi_p = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2}}$.

3. Le module de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1 est $G(f) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}$. On calcule le gain pour les trois premières composantes filtrées non nulles, c'est-à-dire pour $p = 1$, $p = 3$ et $p = 5$. On trouve $\boxed{G(f) = 0{,}93}$, $\boxed{G(3f) = 0{,}64}$ et $\boxed{G(5f) = 0{,}45}$. On trouve alors $a'_p/a_1 = G(pf)/p^2$, soit $\boxed{a'_1/a_1 = 0{,}93}$, $\boxed{a'_3/a_1 = 7{,}1 \times 10^{-2}}$, $\boxed{a'_5/a_1 = 1{,}8 \times 10^{-2}}$.

Le déphasage introduit par le filtre passe-bas d'ordre 1 est $\Delta\varphi(f) = -\arctan\left(\frac{f}{f_c}\right)$. Et on a $\varphi'_p = \varphi_p + \Delta\varphi(pf)$. On trouve $\boxed{\varphi'_1 = -1{,}95\,\text{rad}}$, $\boxed{\varphi'_3 = 0{,}695\,\text{rad}}$, $\boxed{\varphi'_5 = -2{,}68\,\text{rad}}$,

4. On trace la fonction correspondante : $y'(t) = a'_1\cos(2\pi ft + \varphi'_1) + a'_3\cos(3 \times 2\pi ft + \varphi'_3) + a'_5\cos(5 \times 2\pi ft + \varphi'_5)$



Exercice 8 : Filtre RC-RC

1. On utilise les comportement asymptotiques des composants.
   — Lorsque $\omega \to 0$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, il n'y a pas de courant qui circule dans les résistances et la tension de sortie est égale à la tension d'entrée (loi des mailles + loi d'Ohm).
   — Lorsque $\omega \to \infty$, les condensateurs se comportent comme des fils, la tension $\underline{s}$ est prise aux bornes d'un fil et est donc nulle.
2. Pour déterminer la fonction de transfert, on va utiliser un double pont diviseur de tension. On commence par noter $\underline{Z}_{\text{eq}}$ l'impédance équivalente de la résistance et du condensateur de droite. La tension aux bornes du condensateur de gauche est alors
$$\underline{u}_1 = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R}\underline{e} \tag{1}$$
   En utilisant un pont diviseur de tension formé par la résistance et le condensateur de droite, on a
$$\underline{s} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + R}\underline{u}_1 = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + R}\frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R}\underline{e} \tag{2}$$
   Il ne reste plus qu'à faire les calculs avec $\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{R+\underline{Z}_C)\underline{Z}_C}{R+2\underline{Z}_C}$, et $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$. On trouve finalement
$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{1}{(1-R^2C^2\omega^2)+3jRC\omega} = \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+3j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}} \tag{3}$$
3. On calcule le gain en dB : $G_{\text{dB}} = -10\log\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 9\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$
   On détermine les équations des asymptotes :
   — Lorsque $\omega \to 0$, $G_{\text{dB}}(\omega) \approx 1$ et on a une asymptote horizontale.
   — Lorsque $\omega \to \infty$, $G_{\text{dB}}(\omega) \approx -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ et on a une asymptote oblique de pente -40 dB/décade.
   On obtient le diagramme de Bode suivant :