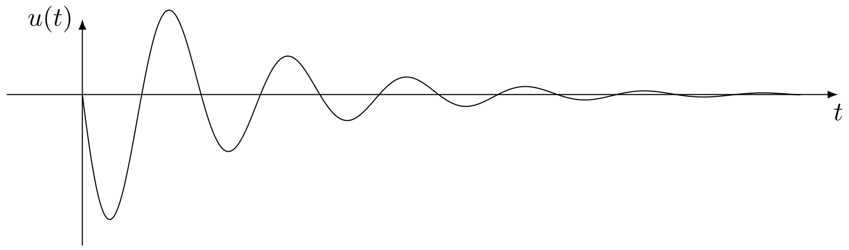
TD5 : Oscillateurs – corrigé

Exercice 1 : Circuit RLC parallèle

1. En régime permanent, condensateur=circuit ouvert et bobine=fil.
   - à $t = 0^-$ on a $\boxed{u = 0,\ i_C = 0,\ i_L = \frac{E}{R_g} \text{ et } i_R = \frac{u}{R} = 0}$;
   - à $t = 0^+$ L'intensité dans la bobine est continue donc $\boxed{i_L = \dfrac{E}{R_g}}$ la tension aux bornes de C est continue donc $\boxed{u = 0}$ donc $\boxed{i_R = 0}$ et la loi des nœuds donne $\boxed{i_C = -i_L}$;
   - lorsque $t \to \infty$ le régime permanent est atteint, la bobine se comporte comme un fil, le condensateur comme un interrupteur ouvert et $\boxed{i_C = i_R = i_L = 0}$ et $u = 0$.
2. La tension $u(t)$ va commencer par être négative ($i_C(0^+) < 0$) puis va osciller avant de se stabiliser à 0. On obtient l'évolution ci-dessous :



3. Lorsqu'on ouvre l'interrupteur le courant dans L va progressivement diminuer en partie pour charger C et en partie en passant dans R. Lorsque le courant dans L s'annule, le condensateur se décharge et le courant devient négatif. L'intensité oscillera jusqu'à ce que toute l'énergie ait été dissipée par la résistance.

   Si R est très élevée, Q est aussi élevé donc on peut supposer que $Q \propto R$. L'analyse dimensionnelle donne $\boxed{Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$

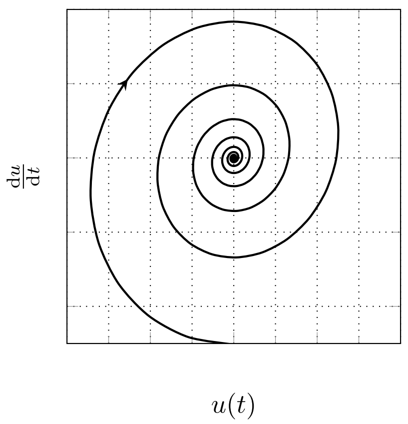
   (Q doit être sans dimension)
4. $u = L\dfrac{di_L}{dt}$, $i_L = -i_C - i_R$, $i_C = C\dfrac{du}{dt}$ et $i_R = \dfrac{u}{R}$ donc $\dfrac{u}{L} = -C\dfrac{d^2u}{dt^2} - \dfrac{1}{R}\dfrac{du}{dt}$. Ce qui nous donne l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0} \qquad (1)$$

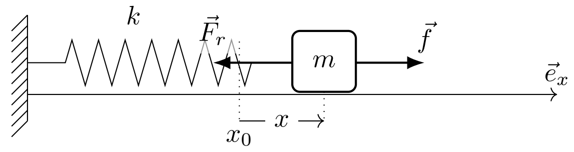
5. On déduit de l'équation précédente (par identification à celle d'un oscillateur harmonique amorti) :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}} \qquad (2)$$

   On retrouve la même expression que dans la question précédente.
6. Avec les données fournies, on trouve $\omega_0 \approx 707\,\text{rad/s}$ et $Q \approx 6$
7. Portrait de phase :



Exercice 2 : Oscillateur mécanique amorti

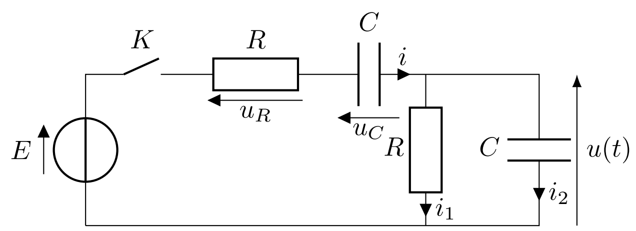
1. 

2. Sur les graphiques, on trouve que la période d'une pseudo-oscillation est environ $\boxed{T_0 \simeq 0{,}1\,\text{s}}$ donc $\boxed{\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} \simeq 63\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}}$.

   On trouve le facteur de qualité en comptant le nombre d'oscillations avant que l'amplitude ne soit divisée par 20, on trouve $\boxed{Q \simeq 5}$.
3. On met l'équation différentielle sous la forme canonique : $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ et on trouve $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$ et $\boxed{Q = \dfrac{\sqrt{km}}{\gamma}}$
4. Avec $m = 1\,\text{g}$ et la valeur de ω_0 trouvée ci-dessus, on trouve $\boxed{k = m\omega_0^2 \simeq 3{,}9\,\text{N/m}}$ et $\boxed{\gamma = \frac{\sqrt{km}}{Q} \simeq 0{,}012\,\text{N}\,\text{s}\,\text{m}^{-1}}$

Exercice 3 : Oscillateur à condensateurs

1. On sait que la dimension de RC est un temps, donc la constante de temps recherchée est $\tau = RC$.
2. On commence par annoter le circuit avec des tensions et des intensités



   - À $t = 0^-$ les condensateurs sont déchargés, donc $u(0^-) = u_C(0^-) = 0$. Comme $u(0^-) = Ri_1(0^-)$, on en déduit que $i_1(0^-) = 0$. De plus le circuit étant en régime permanent, $i_2(0^-) = i(0^-) = 0$ (condensateurs = interrupteurs ouvert).
   - Les tensions étant continues aux bornes des condensateurs, on a $u_C(0^+) = u(0^+) = 0$. En déduit comme précédemment que $i_1(0^+) = 0$. La loi des mailles donne $u_R(0^+) = E$ et donc $i(0^+) = E/R$. Enfin, la loi des nœuds permet d'écrire $i_2(0^+) = i(0^+) = E/R$.
3. Pour établir l'équation différentielle, on écrit les relations pour les composants et le circuit. On a
   - $u_R = Ri$ (Ohm) ;
   - $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ (condensateur) ;
   - $u = Ri_1$ (Ohm) ;
   - $i_2 = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ (condensateur) ;
   - $u + u_R + u_C = E$ (mailles) ;
   - $i = i_1 + i_2$ (nœuds).

   Avec ces équations, on arrive finalement à

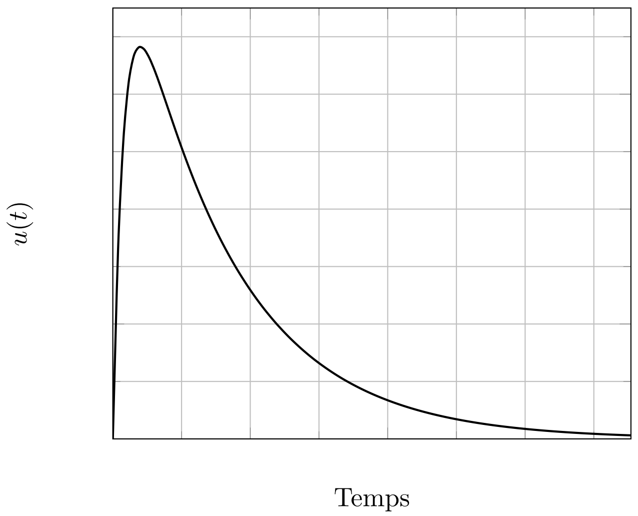
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{RC}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{(RC)^2}u = 0} \qquad (1)$$

   On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti avec

$$\boxed{\frac{\omega_0}{Q} = \frac{3}{RC} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{(RC)^2}} \qquad (2)$$

   On trouve alors que $Q = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ et on en déduit que l'oscillateur est en régime apériodique.

4. Avec la méthode de résolution de l'équation différentielle du cours, on trouve pour le régime apériodique
$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \text{avec} \quad r_{1,2} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(-1 \pm \sqrt{1-4Q^2}\right) \tag{3}$$
En utilisant les conditions initiales, on peut trouver A et B :
$$u(0) = 0 \Leftrightarrow A + B = 0 \Leftrightarrow B = -A \tag{4}$$
et
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{i_2(0)}{C} = \frac{E}{RC} = A(r_1 - r_2) = A\frac{\omega_0}{Q}\sqrt{1-4Q^2} \Leftrightarrow A = \frac{QE}{\sqrt{1-4Q^2}} \tag{5}$$
On a l'allure suivante pour $u(t)$:



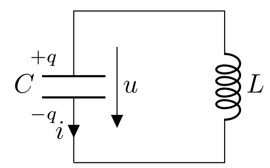
La tension $u(t)$ est nulle à $t = 0^+$ mais elle y est croissante car $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{RC}$. Puis elle tend vers 0 lorsque $t \to \infty$.

Exercice 4 : Interprétation énergétique du facteur de qualité

1. C'est presque une question de cours, il faut savoir le faire les yeux fermés ! (loi des mailles + lois des composants).
2. On calcule le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, On trouve $\boxed{Q = 10}$. Donc cet oscillateur est en régime pseudo-périodique et la solution de l'équation à la forme indiquée (voir cours)
3. A et B sont déterminés à partir des conditions initiales que l'on trouve en étudiant les valeurs des tensions et des intensités à $t = 0^-$ et $t = 0^+$. On trouve que $u_C(O^-) = E$ et $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^-) = 0$. En utilisant ces conditions initiales, on trouve
$$\boxed{A = E \quad \text{et} \quad B = \frac{E}{\omega\tau} \approx \frac{E}{20}} \tag{1}$$
4. Comme le facteur de qualité est assez grand ($Q = 10$) on peut faire l'approximation $\omega = \omega_0$. On remarque également que $B \ll A$, on peut donc négliger le terme en $\sin(\omega t)$ dans l'expression de $u_C(t)$. On obtient alors
$$\boxed{u_C(t) \approx Ee^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 CEe^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\omega_0 t)} \tag{2}$$
5. Le graphique montre bien la décroissance de l'énergie totale avec le temps à cause de la dissipation dans la résistance et on voit également les échanges d'énergie entre le condensateur et la bobine.
6. L'énergie totale de l'oscillateur est la somme de l'énergie du condensateur et de celle de la bobine. On a donc
$$E_{\text{tot}} = E_C + E_L = \frac{1}{2}Cu_C(t)^2 + \frac{1}{2}Li(t)^2 = \frac{1}{2}CE^2e^{-\frac{2t}{\tau}}\left(\cos(\omega t)^2 + \sin(\omega t)^2\right) = \frac{1}{2}CE^2e^{-\frac{2t}{\tau}} \tag{3}$$
7. On calcule la variation relative d'énergie du circuit sur une période avec l'expression de $E_{\text{tot}}(t)$ trouvée à la question précédente :
$$\frac{E_{\text{tot}}(t) - E_{\text{tot}}(t+T)}{E_{\text{tot}}(t)} = \frac{e^{-\frac{2t}{\tau}} + e^{-\frac{2(t+T)}{\tau}}}{e^{-\frac{2t}{\tau}}} = 1 - e^{-\frac{2T}{\tau}} \tag{4}$$
On fait l'approximation que $\frac{2T}{\tau} \ll 1$ (ce qui est un peu discutable vu les valeurs numériques !) et on trouve que
$$\boxed{\frac{E_{\text{tot}}(t) - E_{\text{tot}}(t+T)}{E_{\text{tot}}(t)} \approx \frac{2T}{\tau} \approx \frac{2T_0}{\tau} = \frac{2\pi}{Q}.} \tag{5}$$
La variation relative d'énergie sur une période est bien inversement proportionnelle à Q.

Exercice 5 : Analogie entre oscillateur mécanique et oscillateur électrique

1. L'équation fondamentale de la dynamique donne presque directement $\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$
2. Le circuit étudié est le suivant



Dans ce circuit on a $q = Cu$, $u = -L\frac{di}{dt}$ et $i = \frac{dq}{dt}$, donc on obtient l'équation différentielle : $\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0}$
3. On peut donc faire l'analogie entre les deux situations : la charge correspond à la position $\boxed{q \leftrightarrow x}$ la bobine correspond à l'inertie de l'intensité donc à la masse $\boxed{L \leftrightarrow m}$ et l'inverse de la capacité est la raideur du ressort $\boxed{\frac{1}{C} \leftrightarrow k}$ dans ces conditions $u = \frac{q}{C} \leftrightarrow k \times x = |F_r|$, la tension correspond à la force exercée par le ressort.

Exercice 6 : Associations d'impédances complexes

Dipôle 1 : $Z_{\text{eq}} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$; Dipôle 2 : $Z_{\text{eq}} = j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$;
Dipôle 3 : $Z_{\text{eq}} = \frac{jLR\omega}{R + jL\omega} + \frac{1}{jC\omega}$; Dipôle 4 : $Z_{\text{eq}} = \frac{jR(LC\omega^2 - 1)}{RC\omega + j(LC\omega^2 - 1)}$

Exercice 7 : Circuit RLC parallèle en régime forcé

1. L'impédance complexe équivalente à RLC en parallèle est : $Z_{\text{eq}} = \frac{R}{1 + jR(C\omega - 1/(L\omega))}$, on peut faire apparaître la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ on obtient : $Z_{\text{eq}} = \frac{R}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}$.
On trouve alors
$$\boxed{\underline{i} = \frac{\underline{e}}{Z_{\text{eq}}} = \frac{\underline{e}}{R}\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)} \tag{1}$$
2. L'amplitude de l'intensité vaut
$$\boxed{|\underline{i}| = \frac{|\underline{e}|}{R} \times \sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \tag{2}$$
3. Le déphasage ϕ entre la tension $\underline{e}$ et l'intensité $\underline{i}$ vaut $\boxed{\phi = \arg(\underline{i}) - \arg(\underline{e}) = \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)}$
4. On a
$$\boxed{i(t) = \frac{E_0}{R} \times \sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\cos(\omega t + \phi)} \tag{3}$$

Exercice 8 : Déterminer les paramètres d'un oscillateur

1. Sur le graphique de la phase, on trouve que la pulsation propre est d'environ $\boxed{\omega_0 \simeq 63\,\mathrm{rad\,s^{-1}}}$ et sur le graph de l'amplitude on trouve $\boxed{\Delta\omega \approx 12\,\mathrm{rad/s}}$ ce qui nous donne $\boxed{Q = \omega/\Delta\omega \approx 5}$
2. On peut prendre par exemple $\boxed{L = 1\,\mathrm{H},\ C = 250\,\mu\mathrm{F} \text{ et } R = 12\,\Omega}$
3. C'est la même question que dans l'exercice 2, avec les même valeurs numériques. La constante de raideur du ressort doit être $\boxed{k \simeq 4\,\mathrm{N\,m^{-1}}}$

Exercice 9 : Équivalence de composants

L'impédance équivalente au premier dipôle est $Z_1 = \dfrac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega}$, l'impédance équivalente au second dipôle est $Z_2 = R_2 + \dfrac{1}{jC_2\omega}$. En égalant les deux et en identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$\boxed{R_2 = \frac{R_1}{1 + (R_1C_1\omega)^2} \quad \text{et} \quad C_2 = C_1\left(1 + \frac{1}{(R_1C_1\omega)^2}\right)} \tag{1}$$

Exercice 10 : Impédance complexe d'un circuit

1. C_1 et L_1 sont associés en parallèle, puis en série avec L et R. On obtient l'impédance équivalente :

$$\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{jL_1\omega}{1 - L_1C_1\omega^2} \tag{1}$$

Après calculs, on trouve la forme demandée avec

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{1}{L_1C_1} + \frac{1}{LC_1} \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = \frac{1}{L_1C_1}} \tag{2}$$

2. Avec l'impédance équivalente trouvée, on trouve

$$\boxed{I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{X}{R}\right)} \tag{3}$$

3. On peut remarquer que le circuit forme un pont diviseur de tension et on a

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z}}\underline{e} \tag{4}$$

avec $\underline{Z_1}$ l'impédance équivalent à L_1 et C_1 en parallèle. on trouve finbalement

$$\boxed{U_m = \frac{L\omega E_m}{\sqrt{R^2(1 - L_1C_1\omega^2)^2 + (L\omega(1 - L_1C_1\omega^2) + L_1\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \tan(\varphi) = \frac{R(1 - L_1C_1\omega^2)}{L_1\omega + L\omega(1 - L_1C_1\omega^2)}} \tag{5}$$