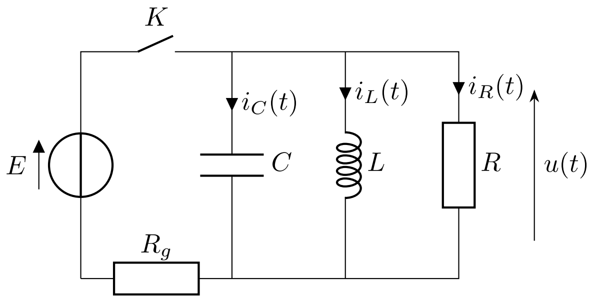
TD5 : Oscillateurs

Exercice 1 : Circuit RLC parallèle

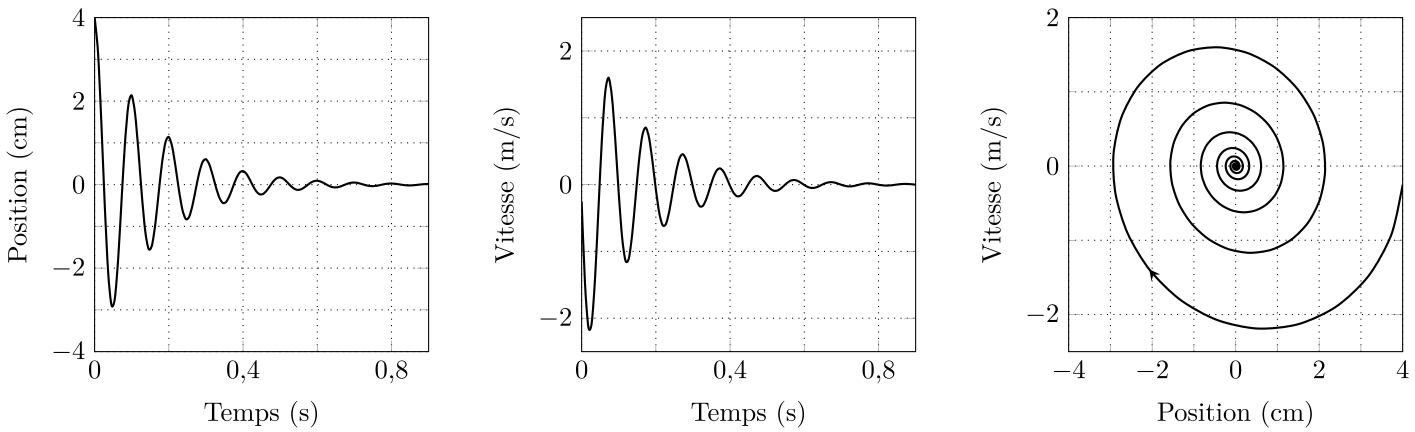


On étudie le circuit RLC parallèle ci-contre. L'interrupteur K est initialement fermé pendant un temps suffisamment long pour que le régime permanent soit atteint. À $t = 0$ on ouvre l'interrupteur et on observe l'évolution de la tension $u(t)$.

1. Donner les valeurs des intensités i_C, i_R, et i_L et de la tension u dans le circuit à $t = 0^-$, $t = 0^+$, et $t \to \infty$.
2. Tracer qualitativement l'allure de $u(t)$ après l'ouverture de K.
3. Comment le facteur de qualité Q du circuit dépend-il de R ? Proposer une expression de Q basée sur une analyse dimensionnelle.
4. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$ pour $t > 0$.
5. En déduire les expressions de la fréquence propre w_0 et du facteur de qualité Q en fonction de R, L et C. Comparer l'expression de Q avec celle trouvée à la question précédente.
6. A.N. : On donne $R = 40\,\Omega$, $C = 200\,\mu\text{F}$ et $L = 10\,\text{mH}$. Calculer la pulsation propre du système et le facteur de qualité. Quelle est la durée du régime transitoire ?
7. Tracer l'allure du portrait de phase de la tension $u(t)$, c'est-à-dire le graphique représentant $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ en fonction de u.

Exercice 2 : Oscillateur mécanique amorti

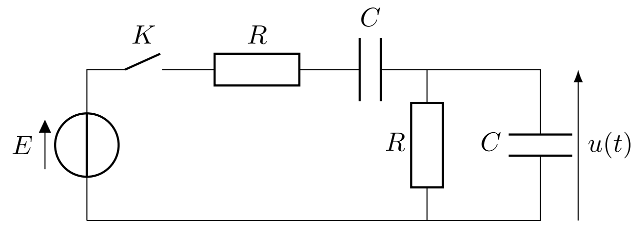
On étudie le mouvement d'une masse m accrochée à un ressort de raideur k et soumise à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -\gamma\vec{v}$ (v est la vitesse de la masse). Le mouvement a lieu suivant l'axe x. On donne le portrait de phase du mouvement de la masse :



1. Faire un schéma du système décrit en représentant les différentes forces qui s'appliquent sur m.
2. Déterminer graphiquement la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q de l'oscillateur
3. L'équation différentielle satisfaite par la position $x(t)$ de la masse est : $\ddot{x} + \dfrac{\gamma}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$. Exprimer le facteur de qualité et la fréquence propre de l'oscillateur en fonction de m, k et γ.
4. On donne $m = 1\,\text{g}$. Déterminer k et γ.

Exercice 3 : Oscillateur à condensateurs

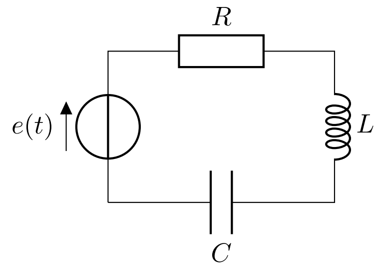
Dans le circuit ci-dessous, les condensateurs sont identiques et ont une capacité $C = 10\,\mu\text{F}$, les résistors sont identiques et ont une résistance $R = 10\,\text{k}\Omega$. Les condensateurs sont initialement déchargés lorsqu'on ferme l'interrupteur K à $t = 0$. E $= 10\,\text{V}$.



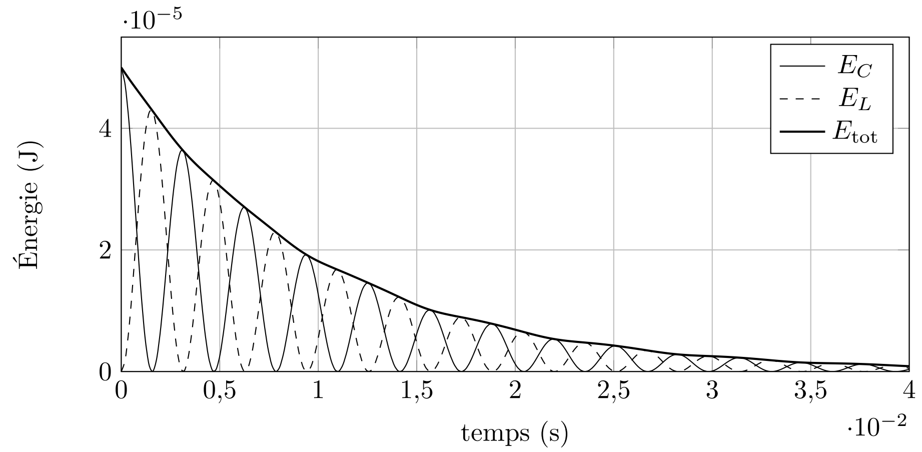
1. Déterminer une constante de temps du circuit.
2. Déterminer toutes les valeurs des tensions et des intensités au temps $t = 0^+$, ainsi qu'en régime permanent (faire des schémas équivalents si nécessaires).
3. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ en faisant apparaître la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q du circuit. Dans quel régime se trouve-t-il ?
4. Résoudre l'équation différentielle pour trouver l'expression de $u(t)$. Tracer l'allure de $u(t)$.

Exercice 4 : Interprétation énergétique du facteur de qualité

On considère le circuit suivant dans lequel $e(t) = E$ si $t < 0$ et $e(t) = 0$ si $t \geq 0$. Avec $R = 100\,\Omega$, $L = 1{,}00\,\text{H}$ et $C = 1{,}00\,\mu\text{F}$.



1. Pour t>0, montrer que l'équation différentielle satisfaite par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur s'écrit
$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = 0 \tag{1}$$
avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R}$.
2. Montrer que la tension $u_C(t)$ peut s'écrire :
$$u_C(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right) \tag{2}$$
avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ et $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.
3. Déterminer les valeurs de A et B.
4. Montrer qu'on peut faire l'approximation :
$$u_C(t) \approx Ee^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad i(t) = -\omega_0 CEe^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\omega_0 t) \tag{3}$$
On conservera cette approximation dans la suite du problème.
5. On représente ci-dessous l'évolution de l'énergie électrique totale E_{tot}, de l'énergie E_C stockée dans le condensateur et de l'énergie E_L stockée dans la bobine.



Commenter le graphique ci-dessus.

6. Exprimer l'énergie électrique $E_{\text{tot}}(t)$ de l'oscillateur en fonction de t.
7. Montrer que la variation relative d'énergie sur une période est inversement proportionnelle à Q :

$$\frac{E_{\text{tot}}(t) - E_{\text{tot}}(t+T)}{E_{\text{tot}}(t)} \propto \frac{1}{Q} \tag{4}$$

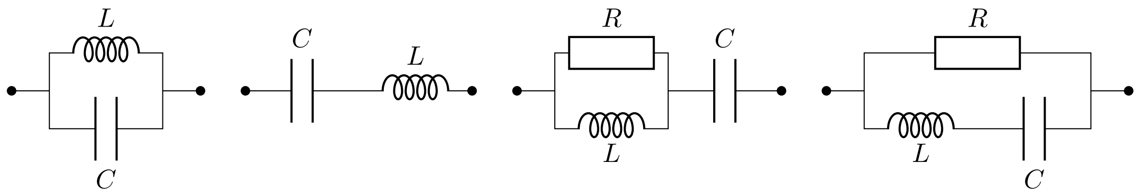
On donne le développement limité $e^x \approx 1 + x$ si $x \ll 1$.

Exercice 5 : Analogie entre oscillateur mécanique et oscillateur électrique

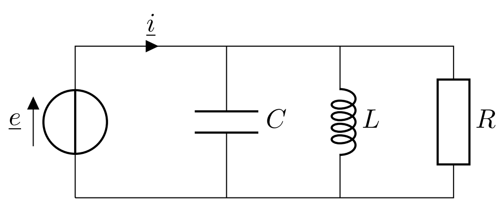
1. On considère une masse m accrochée à un ressort de raideur k et astreinte à se déplacer suivant un axe x horizontal. Déterminer l'équation différentielle de son mouvement.
2. Écrire l'équation différentielle satisfaite par la charge q portée par le condensateur dans un circuit comportant un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L branchés en parallèle.
3. Expliciter l'analogie qui existe entre les oscillateurs mécanique et électrique.

Exercice 6 : Associations d'impédances complexes

Calculer l'impédance complexe équivalente des dipôles suivants :



Exercice 7 : Circuit RLC parallèle en régime forcé

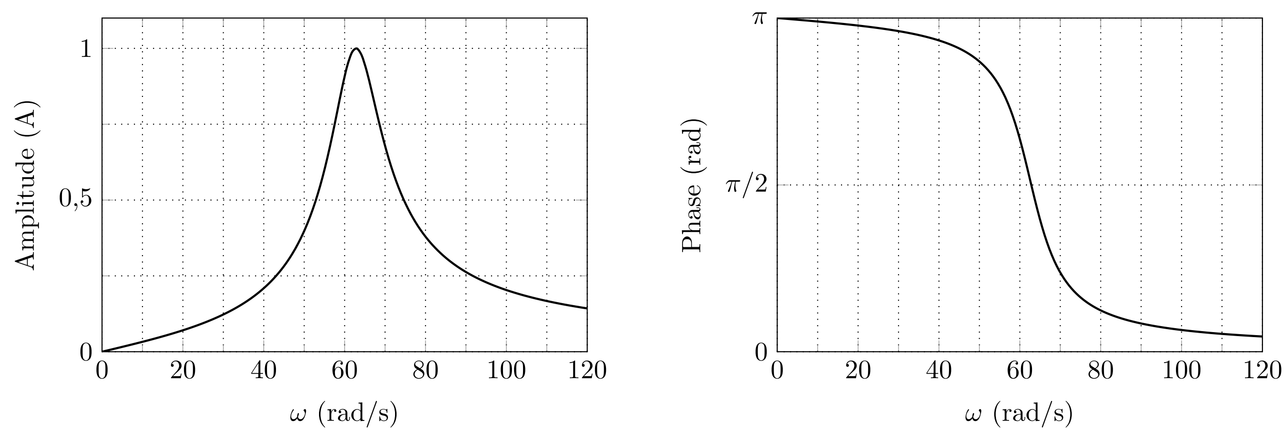


On étudie le circuit ci-contre où le générateur fournit une tension sinusoïdale de pulsation ω.

1. À l'aide de la méthode des complexes, déterminer l'intensité complexe $\underline{i}$ en fonction de $\underline{e}$. Faire apparaître la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q du circuit.
2. Que vaut l'amplitude de l'intensité ?
3. Que vaut le déphasage ϕ entre la tension $\underline{e}$ et l'intensité $\underline{i}$
4. La tension réelle est $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. Écrire l'expression de l'intensité réelle.

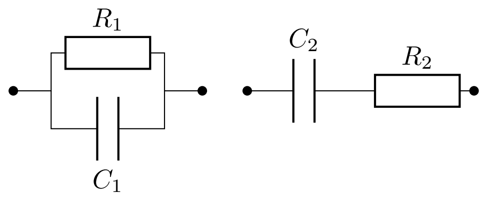
Exercice 8 : Déterminer les paramètres d'un oscillateur

Les graphiques ci-dessous montrent l'amplitude et la phase d'un oscillateur en fonction de la pulsation de l'excitation.



1. Déterminer graphiquement la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q de cet oscillateur.
2. Quelles sont les valeurs des composants que l'on doit choisir pour fabriquer cet oscillateur avec un circuit RLC série ($\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$)
3. Quel constante de raideur de ressort doit-on choisir pour faire osciller une masse $m = 1\,\text{g}$ à la fréquence ω_0 ? On pourra retrouver la pulsation propre d'un système {masse + ressort} par analyse dimensionnelle.

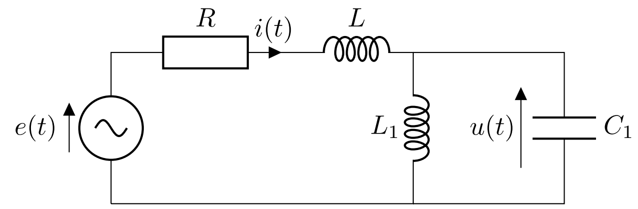
Exercice 9 : Équivalence de composants



Les deux dipôles suivants sont utilisés dans un circuit en régime sinusoïdal à la fréquence ω. Exprimer R_2 et C_2 en fonction de R_1, C_1 et ω pour que les deux dipôles soient équivalents.

Exercice 10 : Impédance complexe d'un circuit

Une source de tension $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ alimente un circuit composé d'une bobine réelle (R, L) en série avec l'association en parallèle d'une bobine d'inductance L_1 et d'un condensateur de capacité C_1. La bobine est parcourue par un courant d'intensité $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$.



1. Montrer que l'impédance complexe du circuit peut se mettre sous la forme

$$\underline{Z} = R + jX \quad \text{avec} \quad X = L\omega\left(\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2}\right) \tag{1}$$

Donner les expressions de ω_1 et ω_2.

2. En déduire les expressions de I_m et φ en fonction de E_m, R et X.
3. Déterminer de même l'amplitude et la phase de la tension u.