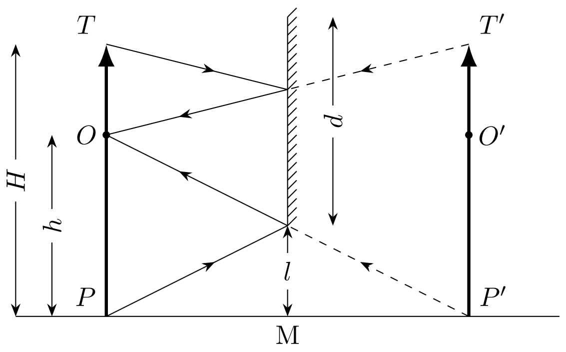
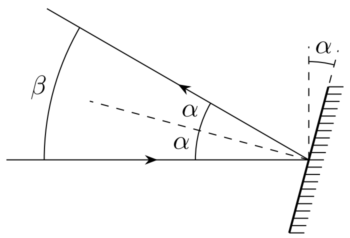
TD1 : Optique géométrique – Corrigé

Exercice 1 : Se voir dans un miroir



1. L'image de la personne par le miroir est virtuelle car les rayons ne passent pas effectivement par les points de l'image.
2. On applique le théorème de Thalès dans le triangle $OP'P$ et on obtient : $\frac{l}{h} = \frac{P'M}{P'P} = \frac{1}{2}$, soit $\boxed{l = h/2}$.
3. De la même manière dans le triangle $OT'T$, on arrive à $\boxed{d = H/2}$
4. La distance entre la personne et le miroir n'intervient pas dans les expressions précédentes, donc ces valeurs ne dépendent pas de la distance entre la personne et le miroir.

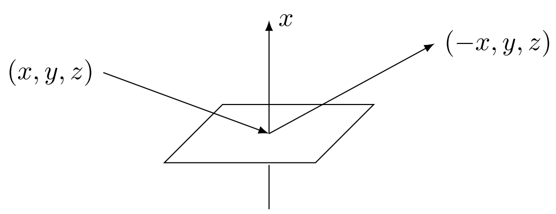
Exercice 2 : Rotation d'un miroir plan



En partant d'une situation où le rayon arrive en incidence normale sur le miroir, on tourne le miroir d'un angle α dans le sens horaire. La normale au miroir tourne également d'un angle α et d'après les lois de Descartes de la réflexion, le rayon réfléchi forme un angle 2α avec le rayon incident.
Lorsque l'on tourne le miroir de α le rayon est dévié de $\boxed{\beta = 2\alpha}$.

Exercice 3 : Coin de cube

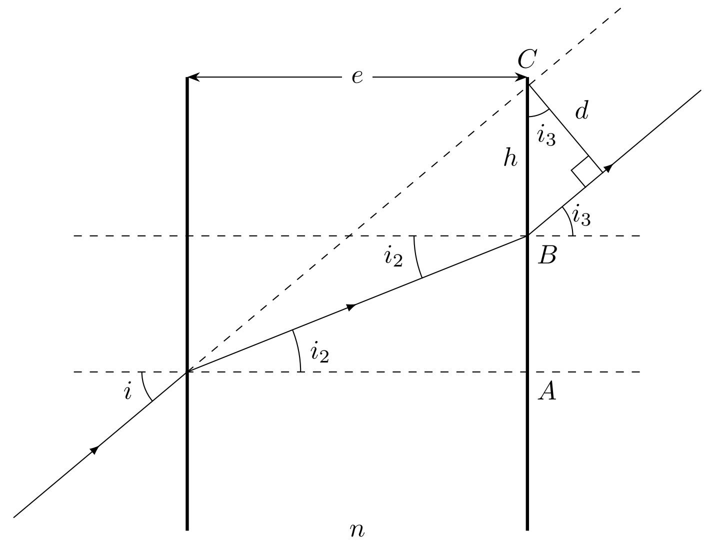
On peut commencer par remarquer qu'un miroir perpendiculaire à un axe x ne change la direction d'un rayon lumineux que suivant l'axe x. Plus précisément, si on représente la direction du rayon incident par un vecteur $I = (x, y, z)$. Un miroir perpendiculaire à l'axe x (miroir B) a pour effet de transformer la coordonnée suivant x en son opposée $-x$, le rayon réfléchi est représenté par le vecteur $I_1 = (-x, y, z)$.



Après réflexion sur les deux autres miroirs, les coordonnées y et z sont également changées en leurs opposées. Le rayon réfléchi par le coin de cube est suivant la direction $I_3 = (-x, -y, -z)$ ce qui correspond à la direction exactement opposée à celle du rayon incident.

Exercice 4 : Rayon lumineux qui traverse une vitre

1. Schéma :



2. La seconde loi de Descartes appliquée à la première interface donne : $\sin(i) = n\sin(i_2)$; sur la seconde interface, on a $n\sin(i_2) = \sin(i_3)$. On en déduit que $\sin(i_2) = \sin(i_3)$ et donc $\boxed{i_3 = i}$.
3. On rappelle que pour un angle i suffisamment petit, on a $\sin(i) \approx i$ et $\cos(i) \approx 1$. Si l'angle i est petit, alors les angles i_2 et i_3 le sont aussi.
   La déviation latérale est $d = h\cos(i_3) \approx h$. Or, on peut exprimer h comme $h = AC - AB = e\tan(i) - e\tan(i_2) \approx e(i - i_2)$. Or, la loi de Descartes donne la relation entre i et i_2 $\sin(i) \simeq i = n\sin(i_2) \simeq ni_2$, d'où

$$\boxed{d \approx i \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) e.} \quad (1)$$

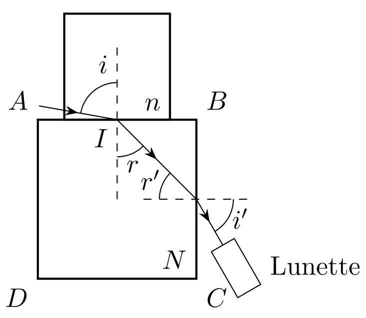
Exercice 5 : Prisme

1. — Sur l'interface de gauche, on a : $\boxed{\sin(i) = n\sin(r)}$, dans l'approximation des petits angles : $\boxed{i = nr}$
   — Sur l'interface de droite, on a : $\boxed{\sin(i') = n\sin(r')}$, dans l'approximation des petits angles : $\boxed{i' = nr'}$
2. Si I est le point où le rayon entre dans le prisme et S le point où il en sort, on écrit que la somme des angles du triangle AIS vaut π, et on obtient $A + \frac{\pi}{2} - r + \frac{\pi}{2} - r' = \pi$ soit finalement $\boxed{r + r' = A}$.
3. Le rayon incident subit une première déviation d'angle $(i - r)$ puis une seconde d'angle $(i' - r')$, donc la déviation totale est : $\boxed{D = (i - r) + (i' - r')}$.
4. En combinant les résultats obtenus aux 3 premières questions, on obtient : $\boxed{D = (n - 1)A}$.
5. Dans un milieu dispersif, la valeur de n dépend de la longueur d'onde λ. Donc la déviation D sera différente pour des longueurs d'onde différentes, ce qui a pour effet de décomposer la lumière incidente.

Exercice 6 : Clou planté dans un bouchon

1. On a réflexion totale si $n\sin(i) = 1$ (i : angle d'incidence du rayon issu de la pointe du clou à l'interface). Avec $\sin(i) = r/\sqrt{r^2 + l^2}$ ($r = d/2$)
   On trouve finalement $\boxed{l_{\min} = \sqrt{n^2 - 1} \times d/2}$.
2. Lorsqu'on plante un clou plus petit que $l_{\min}$ dans la rondelle, on ne peut pas le voir depuis la surface, on ne voit que le fond du récipient d'eau.

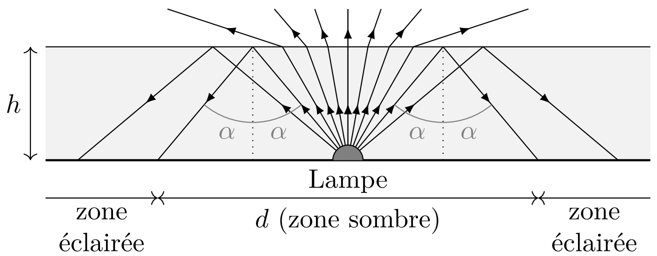
Exercice 7 : Refractomètre à angle limite



1. L'angle de réfraction r en I est donné par $\sin(r) = n/N$ donc $\boxed{r = \arcsin(n/N)}$.
2. L'angle d'incidence sur la face BC est $\boxed{r' = \frac{\pi}{2} - r = \frac{\pi}{2} - \arcsin(n/N)}$.
3. Pour qu'il y ait un rayon émergent par la face BC il ne faut pas qu'il y ait de réflexion totale sur cette face. Pour qu'il n'y ait pas réflexion totale il faut que $N\sin(r') < 1$. Et comme $\sin(r') = \sin(\pi/2 - r) = \cos(r) = \sqrt{1-\sin^2(r)} = \sqrt{1-(n/N)^2}$. On obtient la condition $\boxed{\sqrt{N^2 - n^2} < 1}$.
4. Il faut calculer l'angle minimum α atteint par un rayon lumineux. Il correspond à un angle i maximum soit $i = \pi/2$. Le calcul est exactement le même qu'à la question précédente et on trouve $\boxed{\sin(\alpha) = \sqrt{N^2 - n^2}}$
5. On peut clairement connaître n si on connait α et N, il suffit d'inverser l'équation obtenue à la question précédente pour obtenir $\boxed{n = \sqrt{N^2 - \sin^2(\alpha)}}$.

   La valeur de α est comprise entre 0 et $\pi/2$, ce qui correspond à des valeurs de n comprises dans l'intervalle $\boxed{\sqrt{N^2 - 1} < n < N}$. Ce qui est compatible avec le résultat de la question 3 et l'hyposthèse $n < N$ donnée par l'énoncé.

Exercice 8 : Un petit problème

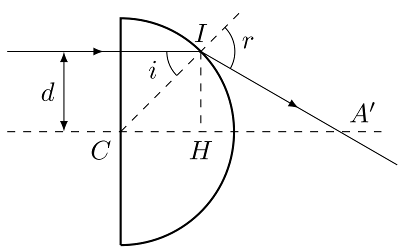


L'effet observé est dû à une reflexion totale de la lumière du projecteur à la surface de l'eau. L'angle limite α au-delà duquel un rayon est totalement réfléchi est $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$, où n est l'indice de l'eau. Le diamètre de la tache sombre est donc $d = 4h\tan(\alpha)$. On en déduit que h est donné par

$$h = \frac{d}{4\tan(\alpha)}$$

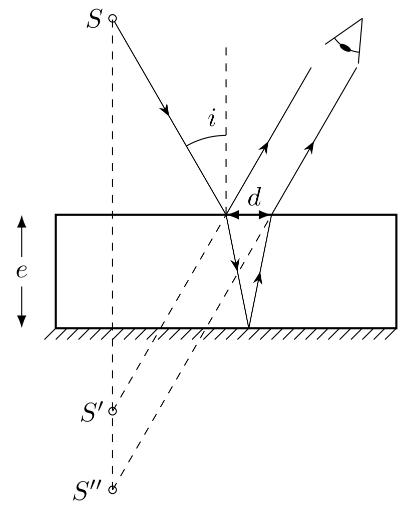
Sur le schéma on voit que $d \approx 70\,\text{cm}$ (1/3 de la largeur du bassin). Avec $n = 1{,}33$, on en déduit que $h \approx 15\,\text{cm}$

Exercice 9 : Dioptre semi-cylindrique



1. $CA' = CH + HA' = R\cos(i) + R\sin(i)/\tan(r-i)$ Soit finalement $\boxed{CA' = R(\cos(i) + \sin(i)/\tan(r-i))}$
2. Conditions de Gauss=rayons paraxiaux. Donc $\boxed{d \ll R}$.
3. Dans ces conditions : $\cos(i) \simeq 1$, $\sin(i) \simeq i$ et $\tan(r-i) \simeq r - i$. La seconde loi de Descartes donne $n\sin(i) = r$ soit $ni = r$. On trouve finalement $\boxed{CF' = R \times n/(n-1)}$.
4. On a réflexion totale pour $r = \pi/2$ soit $n\sin(i_l) = 1$. Avec $\sin(i) = d/R$ on trouve $\boxed{d_l = R/n}$.
5. A.N. : $\boxed{d \simeq 3{,}3\,\text{cm}}$

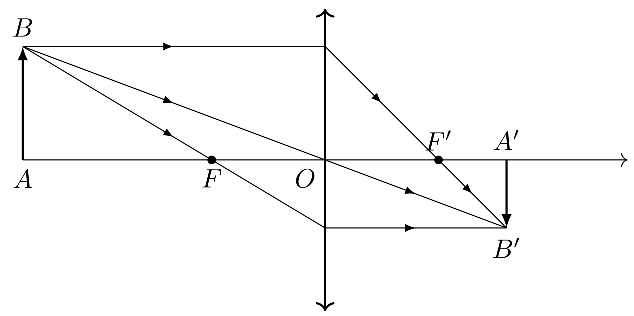
Exercice 10 : Double reflet



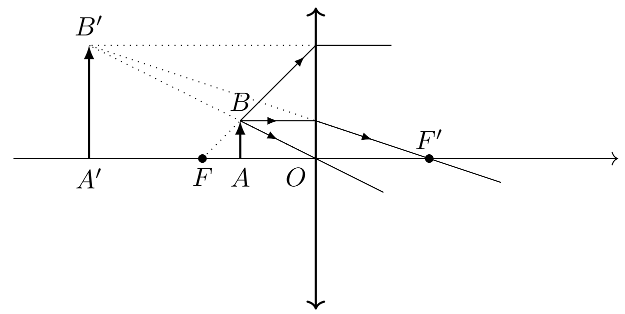
1. Il y a deux images, la première est donnée par la réflexion sur la face du dessus (intensité faible), la seconde est obtenue après deux réfractions et une réflexion sur la face du dessous.
2. Dans les conditions de Gauss, $i \ll 1$ donc $\sin(i) \simeq i$, $\tan(i) \simeq i$ et $\cos(i) \simeq 1$. On peut montrer que $S'S'' = \delta = \dfrac{d}{\tan(i)} = \dfrac{d}{i}$ Or dans les conditions de gauss on a $d = \dfrac{2ei}{n}$. Donc finalement $\boxed{\delta = \dfrac{2e}{n} = 6{,}7\,\text{mm}}$

Exercice 11 : La loupe

1. Schéma :



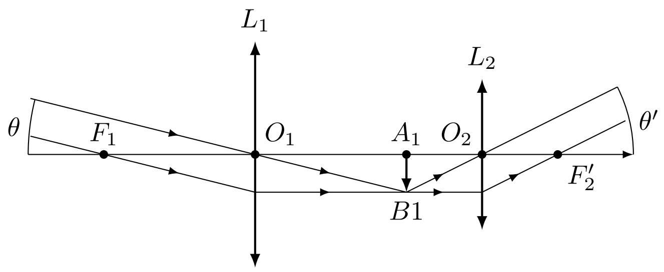
2. $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{f'} \Rightarrow \overline{OA'} = 6{,}7\,\text{cm}$
3. Schéma :



   Ici, l'image est virtuelle car il faut prolonger les rayons lumineux pour déterminer son emplacement. La lentille joue le rôle de loupe car lorsqu'un observateur se place à droite de la lentille, il voit l'image $A'B'$ sous un angle plus grand que l'objet AB.
4. $G_t = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{f'}{f' + \overline{OA}} = 4$

Exercice 12 : Lunette astronomique

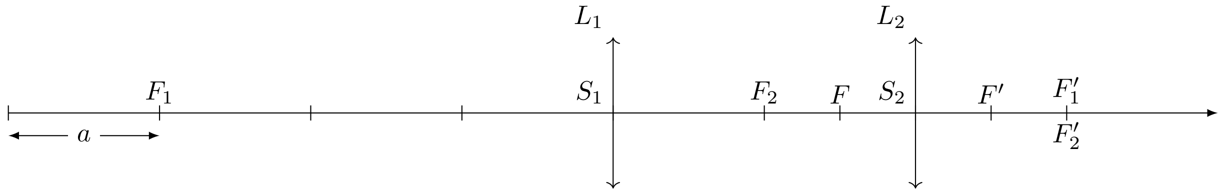
1. Schéma :



2. Voir schéma. L'image se situe $\boxed{\text{à l'infini}}$.
3. $\tan(\theta') = \dfrac{AB}{f_2'} = \dfrac{f_1'\tan(\theta)}{f_2'}$. Dans l'approximation des petits angles : $\boxed{\theta' = \dfrac{f_1'}{f_2'}\theta}$.
4. $1' = \frac{1}{60}°$. Ici $G = 100$ donc $\boxed{\theta' = 100' \simeq 1{,}67°}$

Exercice 13 : Oculaire négatif de Huygens

1. On ne montre pas la construction des rayons de la question 2.



2. Pour trouver la position du foyer image F', on cherche la position de l'image d'un point A se situant à l'infini sur l'axe optique. Son image par la lentille L_1 se trouve dans le plan focal image F_1'. Il faut donc trouver l'image de F_1' par la lentille L_2. On utilise la formule de conjugaison de Descartes :

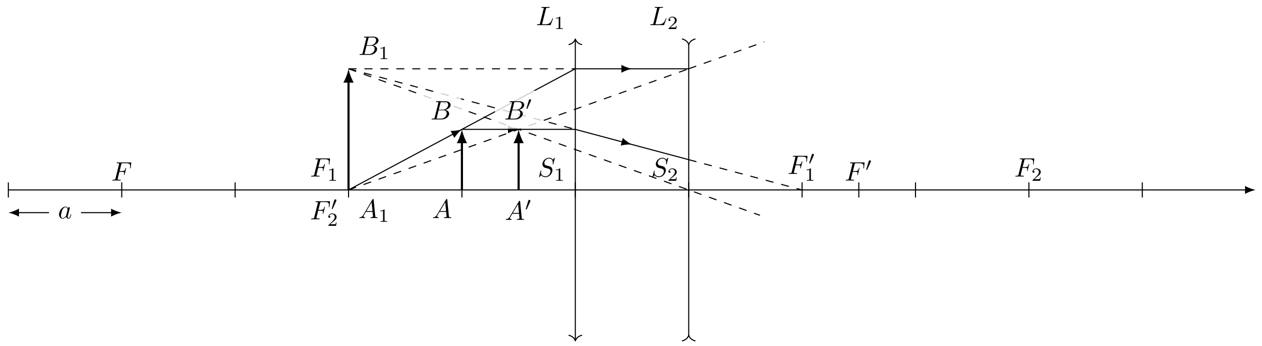
$$\frac{1}{\overline{S_2F'}} - \frac{1}{\overline{S_2F_1'}} = \frac{1}{a} \quad \text{avec } \overline{S_2F_1'} = a \quad \text{on trouve } \overline{S_2F'} = \frac{a}{2}$$

Pour trouver la position du foyer objet du système, il faut déterminer le point F dont l'image par le système se trouve à l'infini. L'image de F par la lentille L_1 doit se trouver au point F_2. En appliquant la formule de conjugaison, on a alors :

$$\frac{1}{\overline{S_1F_2}} - \frac{1}{\overline{S_1F}} = \frac{1}{3a} \quad \text{avec } \overline{S_1F_2} = a \quad \text{on trouve } \overline{S_1F} = \frac{3a}{2}$$

Exercice 14 : Encore un doublet

1.



2. Pour trouver la position du foyer image F', on cherche la position de l'image d'un point A se situant à l'infini sur l'axe optique. Son image par la lentille L_1 se trouve dans le plan focal image F_1'. Il faut donc trouver l'image de F_1' par la lentille L_2. On utilise la formule de conjugaison de Newton :

$$\overline{F_2'F'} \times \overline{F_2F_1'} = -{f_2'}^2 = -9a^2 \quad \text{avec } \overline{F_2F_1'} = -2a \quad \text{on trouve } \boxed{\overline{F_2'F'} = \tfrac{9a}{2}}$$

Pour trouver la position du foyer objet du système, il faut déterminer le point F dont l'image par le système se trouve à l'infini. L'image de F par la lentille L_1 doit se trouver au point F_2. En appliquant la formule de conjugaison, on a alors :

$$\overline{F_1'F2} \times \overline{F_1F} = -{f_1'}^2 = -4a^2 \quad \text{avec } \overline{F_1'F_2} = 2a \quad \text{on trouve } \boxed{\overline{F_1F} = -2a}$$

3. L'objet est réel. La construction de l'image est représentée sur le schéma précédent, on construit l'image A_1B_1 de AB par la lentille L_1, puis l'image $A'B'$ de A_1B_1 par la lentille L_2.
4. On détermine la position de l'image A_1B_1 de l'objet AB par la lentille L_1 en utilisant la formule de conjugaison de Descartes :

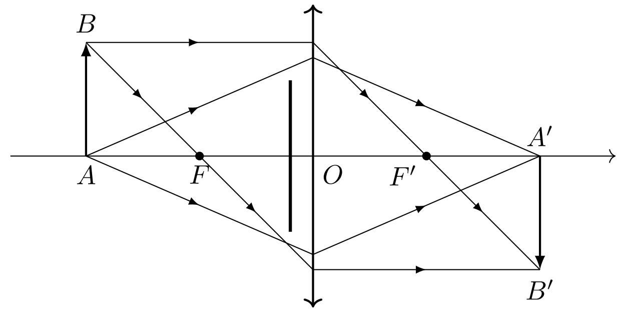
$$\frac{1}{\overline{S_1A_1}} - \frac{1}{\overline{S_1A}} = \frac{1}{2a} \quad \text{avec } \overline{S_1A} = -a \quad \text{on trouve } \boxed{\overline{S_1A_1} = -2a}$$

Puis l'image $A'B'$ de A_1B_1 par la lentille L_2 en utilisant la formule de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{S_2A'}} - \frac{1}{\overline{S_2A_1}} = \frac{1}{-3a} \quad \text{avec } \overline{S_2A_1} = -3a \quad \text{on trouve } \boxed{\overline{S_2A'} = -\tfrac{3}{2}a}$$

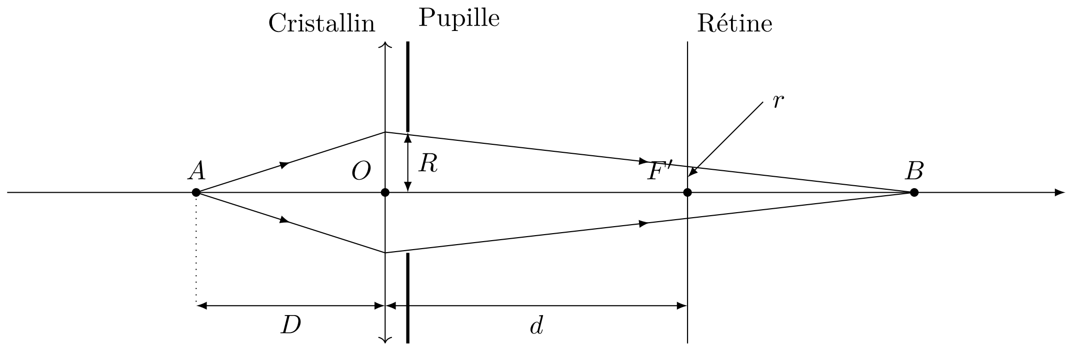
Exercice 15 : Cache sur lentille

Lorsque l'on cache une partie de la lentille, *on ne cache pas une partie de l'image !* Le schéma ci-dessous permet de s'en convaincre. Tous les points de l'image reçoivent des rayons lumineux provenant de l'objet, comme les rayons passant par le centre de la lentille sont bloqués l'image est moins lumineuse.



Exercice 16 : L'œil

1. $\tan(\alpha) = h/d \simeq (\alpha) \Rightarrow \alpha \simeq \boxed{3 \times 10^{-4}\,\text{rad}}$
2. Le plus petit objet a une dimension $\boxed{l = PP \times \tan(\alpha) \simeq 75 \times 10^{-6}\,\text{m} = 75\,\mu\text{m}}$.
3. Pour un œil normal le foyer principal objet du cristallin se trouve sur la rétine, soit à une distance d du cristallin. On a alors la situation suivante :



La formule de conjugaison de Descartes donne la distance OB :

$$\frac{1}{\overline{OB}} - \frac{1}{-D} = \frac{1}{d} \Leftrightarrow \overline{OB} = \frac{dD}{D-d} \tag{1}$$

On utilise ensuite le théorème te Thalès pour exprimer r en fonction de R, on a

$$\frac{R}{r} = \frac{OB}{BF'} = \frac{OB}{OB-d} = \frac{1}{1-d/OB} = \frac{D}{d} \tag{2}$$

D'où finalement $\boxed{r = R\dfrac{d}{D}}$

4. Tant que $r < h$ il il n'y a qu'une cellule qui capte la lumière donc tout se passe comme si l'objet était un point. Pour $R = 1$ mm on prend $r = h$ ce qui donne $\boxed{D_{\min} = \dfrac{dR}{h} \simeq 3\,\text{m}}$.
5. Le PP et le PR son plus proches de l'œil. Il voit flou les objets éloignés mais il voit des objets plus proches. Il faut utiliser des $\boxed{\text{lentilles divergentes}}$.

6. Avec la relation de conjugaison et en prenant le PR positif, $\frac{1}{d}+\frac{1}{PR}=\frac{1}{f'}$ soit $\boxed{PR = 1{,}11\,\mathrm{m}}$. Cette personne est très myope !
7. Toujours avec la formule de conjugaison : $\frac{1}{d}+\frac{1}{PP}=\frac{1}{f'_2}$ soit $\boxed{f'_2 = 13{,}3\,\mathrm{mm}}$.

   La plage d'accommodation est donc de $\boxed{\Delta V = \frac{1}{f'_2}-\frac{1}{f'} \simeq 7{,}6\delta}$.
8. Le PP est plus éloigné, le PR ne change pas car toujours à l'infini. Il faut utiliser des $\boxed{\text{lentilles convergentes}}$.