TD18 : Thermodynamique 2 – corrigé

Exercice 1 : Chauffage d'un gaz parfait

1. On utilise l'équation d'état des gaz parfaits : $P_0V_0 = nRT_0$ avec $V_0 = Sh_0$, on en déduit que $h_0 = \frac{nRT_0}{P_0S}$, on trouve $\boxed{h_0 \simeq 25\,\text{cm}}$
2. Le piston est bloqué, la transformation est isochore, donc $\boxed{W = 0}$. Le premier principe donne $\Delta U = Q = C_v\Delta T = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_0)$, soit $\boxed{Q \simeq 47{,}8\,\text{J}}$.
3. Lorsque le piston est libre de bouger, la transformation se fait à pression P_0 constante. Le volume V' occupé par le gaz en fin de transformation est $V' = \frac{nRT_1}{P_0}$ et le travail des forces de pression reçu par le gaz est $W = -P_0\Delta V = -P_0(V' - V_0) = -nR(T_1 - T)$ soit $\boxed{W \simeq -19{,}1\,\text{J}}$. La variation d'énergie interne étant $\Delta U = nC_{vm}\Delta T = 47{,}8\,\text{J}$, le premier principe donne $\boxed{Q = \Delta U - W \simeq 66{,}9\,\text{J}}$.
   La transformation se faisant à P constante on aurait pu immédiatement écrire $Q = \Delta H = C_p\Delta T = \frac{7}{2}nR\Delta T \simeq 66{,}9\,\text{J}$.

Exercice 2 : Compression isotherme ou monotherme

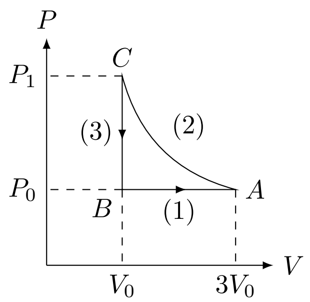
1. On utilise l'équation d'état des gaz parfaits, on trouve $V_2 = \frac{nRT_1}{P_2}$ et on a également $n = \frac{P_1V_1}{RT_1}$ donc $\boxed{V_2 = V_1\frac{P_1}{P_2} = 0{,}5\,\ell}$.
   L'énergie interne du gaz ne dépend que de sa température, donc elle reste constante $\boxed{\Delta U = 0}$. Le travail des forces de pression est $W = \int_{V_1}^{V_2}\delta W = \int_{V_1}^{V_2} -PdV = -nRT_1\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = -P_1V_1\ln\frac{V_2}{V_1}$. On trouve $\boxed{W \simeq 1151\,\text{J}}$. Le premier principe donne alors $\boxed{Q = \Delta U - W = -W = -1151\,\text{J}}$. (Le gaz fournit de l'énergie thermique à l'extérieur)
2. La température finale et la pression finale étant identiques au cas précédent, le volume final, et sa variation d'énergie interne restent identiques. La transformation étant monobare, le travail des forces de pression est $W = -P_2\Delta V$ soit $\boxed{W' = 4500\,\text{J}}$ et de la même manière $\boxed{Q' = -4500\,\text{J}}$.

Exercice 3 : Transformation cyclique d'un gaz parfait

1. Voir graph ci-contre.
2. **étape 1 :** $\Delta U_1 = nC_{vm}\Delta T = nC_{vm}(T_1 - T_0)$, avec $T_1 = \frac{P_0(3V_0)}{nR} = 3T_0$ donc $\boxed{\Delta U_1 = 2nC_{vm}T_0 \simeq 11{,}3\,\text{kJ}}$, $W_1 = -P_0\Delta V = -2P_0V_0 = -2nRT_0$ soit $\boxed{W_1 \simeq -4{,}5\,\text{kJ}}$ et $\boxed{Q_1 = \Delta U_1 - W_1 \simeq 15{,}9\,\text{kJ}}$ et $\Delta H_1 = nC_{pm}\Delta T = 2nC_{pm}T_0 \approx 15{,}9\,\text{kJ}$

   étape 2 : Isotherme $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta U_2 = \Delta H_2 = 0}$, $W_2 = -\int_{3V_0}^{V_0} PdV = -nRT_1\ln\frac{V_0}{3V_0}$ soit $\boxed{W_2 =\simeq 7{,}5\,\text{kJ}}$ et $\boxed{Q_2 = -W2}$

   étape 3 : Isochore $\Rightarrow$ $\boxed{W_3 = 0}$. $\Delta U_3 = nC_{vm}(T_0 - T_1)$ soit $\boxed{\Delta U_3 = -11{,}3\,\text{kJ}}$; $\Delta H_3 = nC_{pm}(T_0 - T_1) \approx -15{,}9\,\text{kJ}$ et $\boxed{Q_3 = \Delta U_3 = -11{,}3\,\text{kJ}}$.
3. C'est un cycle donc les fonctions d'état U et H ne varient pas $\boxed{\Delta U_{\text{total}} = \Delta H_{\text{total}} = 0}$ et on a $\boxed{W_{\text{total}} = 3\,\text{kJ et } Q_{\text{total}} = -3\,\text{kJ}}$ C'est un cycle récepteur ($W > 0$).



Exercice 4 : Calorimétrie

1. On effectue la transformation à pression constante, donc $\Delta H = Q$ et comme le système est calorifugé, $Q = 0 = \Delta H$. On a donc $Mc_{\text{eau}}(T_f - T_1) + mc_{\text{eau}}(T_f - T_2) + C(T_f - T_1) = 0$, on en déduit que $C = c_{\text{eau}}\left(m\frac{T_2 - T_f}{T_f - T_1} - M\right)$, on trouve $\boxed{C \approx 94\,\text{J}\,\text{K}^{-1}}$. La masse en eau μ équivalente est telle que $\mu c_{\text{eau}} = C$ soit $\boxed{\mu \approx 22\,\text{g}}$.
2. De la même manière, on trouve $\underbrace{(M + \mu)c_{\text{eau}}(T'_f - T'_1)}_{\Delta H_{\text{eau+calorimetre}}} + \underbrace{m'c(T'_f - T'_2)}_{\Delta H_{\text{métal}}} = 0$.
   Ce qui donne finalement $\boxed{c = c_{\text{eau}}\frac{M' + \mu}{m'}\frac{T'_f - T'_1}{T'_2 - T'_f} \approx 444\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}}$

Exercice 5 : Intérêt des glaçons

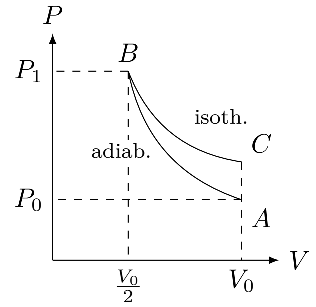
1. On a $\Delta H = m_lc\Delta T$ soit $\boxed{\Delta H \simeq 8360\,\text{J}}$.
2. $\Delta H = Q$ (transformation monobare) et $t = \frac{Q}{a}$, on trouve $\boxed{t \simeq 278\,\text{s}}$ soit un peu moins de 5 minutes.
3. La variation d'enthalpie du système est $\Delta H = \Delta H_{\text{fus}} + \Delta H_{0\to 10\,°\text{C}} = m_gh_f + (m_l + m_g)c\Delta T$ ce qui donne $\boxed{\Delta H \simeq 18{,}4\,\text{kJ}}$
4. $\boxed{t = \frac{\Delta H}{a} \simeq 612\,\text{s}}$ soit environ 10 minutes. Les glaçons ralentissent considérablement le réchauffement de la boisson.

Exercice 6 : Enthalpie de changement d'état

La transformation se faisant à pression constante, on a $\Delta H = Q$, on doit donc calculer la variation d'enthalpie du système. On peut décomposer ΔH de la manière suivante : $\Delta H = \Delta H_{\text{glace}} + \Delta H_{\text{fus}} + \Delta H_{\text{liq}} + \Delta H_{\text{vaporis.}} + \Delta H_{\text{vap.}}$. Avec $\Delta H_{\text{glace}} = mc_g\Delta T_{\text{glace}} \simeq 20{,}6\,\text{kJ}$, $\Delta H_{\text{fus}} = mh_f \simeq 333\,\text{kJ}$, $\Delta H_{\text{liq}} = mc_l\Delta T_{\text{liq}} \simeq 418\,\text{kJ}$, $\Delta H_{\text{vaporis.}} = mh_v = 2257\,\text{kJ}$ et enfin $\Delta H_{\text{vap.}} = mc_v\Delta T_{\text{vap.}} \simeq 28{,}2\,\text{kJ}$. Au total, on trouve $\boxed{Q \simeq 3057\,\text{kJ}}$. On remarque que la majeur partie de cette énergie thermique sert à évaporer l'eau.

Exercice 7 : Compression puis détente

1. Voir graph.
2. Lors d'une transformation adiabatique réversible la loi de Laplace donne $P_1V_1^\gamma = P_0V_0^\gamma$
   donc $P_1 = P_0\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma = 2^\gamma P_0$.
   Et pour un GP diatomique $\gamma = \frac{7}{5}$ donc $\boxed{P_1 \simeq 2{,}64\,\text{bar}}$.
   L'équation d'état des gaz parfaits donne $\boxed{T_1 = T_0\frac{P_1}{2P_0} \simeq 387\,\text{K} \simeq 113{,}8\,°\text{C}}$
3. La détente étant isotherme, on trouve P_2 grâce à l'équation d'état des gaz parfaits : $\boxed{P_2 = P_0\frac{T_1}{T_0} \simeq 1{,}32\,\text{bar}}$



4. **Transfo. adiabatique réversible :** $\boxed{Q_1 = 0}$. On doit trouver W_1 en intégrant $\delta W = -PdV = -P_0V_0^\gamma\frac{dV}{V^\gamma}$. Donc
   $$W_1 = -P_0V_0^\gamma\int_{V_0}^{V_1} V^{-\gamma}dV = -P_0V_0^\gamma\left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]_{V_0}^{V_1} = P_0V_0\frac{2^{\gamma-1} - 1}{\gamma - 1} = nRT_0\frac{2^{\gamma-1} - 1}{\gamma - 1} \text{ soit } \boxed{W_1 \simeq 1945\,\text{J}}.$$
   Transfo. isotherme : $\delta W = -PdV = -nRT_1\frac{dV}{V}$ donc après intégration on trouve $W_2 = -nRT_1\ln\frac{V_0}{V_1} = nRT_1\ln 2$ soit $\boxed{W_2 \simeq -2230\,\text{J}}$. Comme la transformation est isotherme, $\Delta U = 0$ et $\boxed{Q_2 = -W_2 \simeq 2230\,\text{J}}$.

Exercice 8 : Bilan d'entropie

On a $\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}}$ et $S_{\text{éch}} = \frac{Q}{T}$ = où Q est la quantité de chaleur échangée, et T la température du thermostat (le lac est suffisament grand pour se comporter comme un thermostat).
Donc $S_{\text{éch}} = \frac{mc_{\text{fer}}\Delta T_{\text{fer}}}{T_{lac}}$, on trouve $S_{\text{éch}} \simeq -1906\,\text{J}\text{K}^{-1}$.
La variation d'entropie du fer est $\Delta S = mc_{\text{fer}}\ln\frac{T_{lac}}{T_{\text{fer}}}$ soit $\Delta S \simeq -1014\,\text{J}\text{K}^{-1}$.
L'entropie créée est donc $\boxed{S_{\text{créée}} = \Delta S - S_{\text{éch}} \simeq 892\,\text{J}\text{K}^{-1}}$.
La mise en contact de deux corps à des températures différentes est une transformation irréversible qui crée de l'entropie.

Exercice 9 : Contact thermique entre deux solides

1. Le système composé des deux solides est isolé thermiquement et la transformation se fait à pression constante donc $\Delta H_{\text{tot}} = Q = 0$. Donc on a $C_1T_1 + C_2T_2 = (C_1 + C_2)T_e$ d'où $\boxed{T_e = \frac{C_1T_1 + C_2T_2}{C_1 + C_2}}$.
2. $\boxed{\Delta S = C_1\ln(T_e/T_1) + C_2\ln(T_e/T_2)}$
3. Lorsque $C_1 = C_2 = C$ on a $\Delta S = C\ln\frac{T_e^2}{T_1T_2}$ or $T_e = \frac{T_1+T_2}{2}$, on utilise alors l'inégalité arithmético-géométrique, on montre que $T_1T_2 \le T_e^2$. Donc $\frac{T_e^2}{T_1T_2} > 1$ et $\Delta S > 0$. Le système des deux solides étant isolé, $Q = 0$ et $\Delta S = S_{\text{créée}}$. Il y a donc de l'entropie créée lors de cette transformation, elle est irréversible.

Exercice 10 : Création d'entropie et changement d'état

1. Lors d'un changement d'état $\boxed{\Delta S = \Delta H/T_1 = mh_f/T_1}$
2. L'entropie échangée avec le thermostat est $S_e = Q/T = mh_f/T$
3. L'entropie créée lors du changement d'état est $\boxed{S_c = \Delta S - S_e = mh_f\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T}\right)}$ Comme on a forcément $T \geq T_1$ alors $S_c \geq 0$
4. Lorsque $T \to 0\,°\mathrm{C}$, $S_c \to 0$, si la température du thermostat est la même que celle du changement d'état, la transformation est réversible.

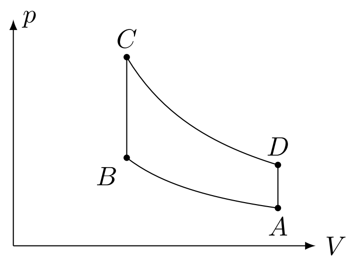
Exercice 11 : Rendement d'un cycle moteur

1. L'équation d'état des gaz parfait donne $\boxed{T_A = T_C = 2P_0V_0/nR = 2T_0}$.
2. C'est un cycle moteur car il est parcouru dans le sens horaire et donc $W < 0$ sur un cycle. Il est ditherme car il nécessite deux sources de chaleur, une à la température T_0 et la seconde à la température $2T_0$. Le théorème de Carnot indique que le rendement maximum théorique est $\eta_{th} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$ avec $T_f = T_0$ et $T_c = 2T_0$ on trouve $\boxed{\eta_{th} = 50\,\%}$.
3. Le travail reçu par le gaz au cours d'un cycle est l'opposé de l'aire du cycle dans le diagramme (P, V), soit $\boxed{W = -\frac{1}{2}P_0V_0 = -\frac{1}{2}nRT_0}$.
4. Le segment AB est parcouru à pression constante donc $Q_{AB} = \Delta H = C_p\Delta T = C_pT_0$. Or pour un GP monoatomique $C_p = \frac{5}{2}nR$ donc $\boxed{Q_{AB} = -\frac{5}{2}nRT_0}$ avec $n = 1\,\mathrm{mol}$.

   Le segment BC est une transformation isochore donc $Q_{BC} = \Delta U = C_v\Delta T$. Avec $C_v = \frac{3}{2}nR$ on trouve $\boxed{Q_{BC} = \frac{3}{2}nRT_0}$.
5. D'après le premier principe, sur un cycle $\Delta U = W + Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 0$. Donc $Q_{CA} = -W - Q_{AB} - Q_{BC}$ soit $Q_{CA} = \frac{1}{2}nRT_0 - \frac{3}{2}nRT_0 + \frac{5}{2}nRT_0$ donc $\boxed{Q_{CA} = \frac{3}{2}nRT_0}$
6. Le rendement du moteur est $\eta = -\frac{W}{Q_{CA}+Q_{BC}} = \frac{1}{6}$ soit $\boxed{\eta \simeq 16{,}7\,\%}$. Ce rendement est inférieur au rendement maximum théorique, ce qui indique que le cycle n'est pas réversible.

Exercice 12 : Moteur Stirling

1. Transformation :



2. Les étapes AB et CD sont réversibles car elles sont quasistatiques sans différence de température. Les étapes BC et DA ne sont pas réversibles car elles impliquent un transfert thermique avec une source à une température différente de celle du système.
3. Au cours du cycle, on a les transferts thermiques suivants :
   - $Q_{AB} = nRT_f \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -nRT_f\ln(\alpha)$ (transformation isotherme d'un gaz parfait) ;
   - $Q_{BC} = C_V(T_c - T_f)$ (transformation isochore, $Q = \Delta U$) ;
   - $Q_{CD} = nRT_c \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = nRT_c\ln(\alpha)$ (transformation isotherme d'un gaz parfait)
   - $Q_{DA} = C_V(T_f - T_c)$ (transformation isochore).
4. Pour déterminer le rendement, il faut trouver quels sont les transferts thermiques qui *coutent*. Dans le cas présent il s'agit de l'énergie thermique prise à la source chaude, soit $Q_{BC} + Q_{CD}$. De plus sur un cycle, on peut écrire $\Delta U = 0 = W + Q$ donc le travail fourni au milieu extérieur est $-W = Q$. Le rendement du moteur est donc
$$\eta = \frac{Q}{Q_{BC} + Q_{CD}} = \frac{nR\ln(\alpha)(T_c - T_f)}{C_V(T_c - T_f) + nRT_c\ln(\alpha)} = \frac{\ln(\alpha)(T_c - T_f)}{\frac{1}{\gamma-1}(T_c - T_f) + T_c\ln(\alpha)} \tag{1}$$
   On a utilisé la relation $C_V = \frac{nR}{\gamma-1}$. L'application numérique donne $\eta = 25\,\%$
5. Si les échangent thermiques des transformations isochores sont compensés, le transfert de chaleur qui *coute* n'est plus que Q_{CD} et le rendement devient
$$\eta = \frac{T_c - T_f}{T_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c} \approx 41\,\% \tag{2}$$
   En compensant les transferts thermiques irréversibles, on obtient le rendement maximum possible qui est donné par la formule de Carnot.

Exercice 13 : Problème : refroidissement d'une centrale nucléaire

Un réacteur de centrale nucléaire produit une puissance électrique de l'ordre de $1 \times 10^9\,\mathrm{W}$ avec un rendement d'environ $\eta = 33\,\%$. Une centrale qui comporte 2 réacteurs produira une puissance électrique de l'ordre de $Pe = 2 \times 10^9\,\mathrm{W}$ et donc devra dissiper une puissance thermique $P_{th} = \frac{P_e}{\eta} \approx 6{,}1 \times 10^9\,\mathrm{W}$.

La puissance thermique nécessaire pour augmenter de ΔT la température d'une rivière de débit D est $P = D\rho c_e\Delta T$ où $c_e = 4{,}2 \times 10^3\,\mathrm{J\,K^{-1}\,kg^{-1}}$ est la capacité thermique de l'eau et $\rho = 1 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. On a donc $D = \frac{P}{\Delta T\rho c_e}$. Avec les valeurs numériques ci-dessus, on trouve un débit minimum de $D \approx 1{,}4 \times 10^3\,\mathrm{m^3/s}$.