

TD15 : Thermodynamique 1 – corrigé

Exercice 1 : PRESSION D'UN PNEU

Attention, ne pas oublier de convertir les températures en Kelvin !

- Lorsque l'automobiliste gonfle le pneu, il y met une quantité de matière n d'air telle que $P_1V = nRT_1$, on en déduit que $n = \frac{P_1V}{RT_1}$ (v : volume du pneu).
Lorsque la température passe à T_2 , la pression devient $P_2 = \frac{nRT_2}{V} = P_1 \frac{T_2}{T_1}$ soit $P_2 \simeq 2,5$ bar.
- Le conducteur ramène la pression des pneus à P_1 à la température T_2 , il laisse donc dans les pneus la quantité de matière $n_2 = \frac{P_1V}{RT_2}$.
Lorsque la température redescend à T_1 , la pression des pneus devient $P_3 = \frac{n_2RT_1}{V} = P_1 \frac{T_1}{T_2}$ soit $P_3 \simeq 1,6$ bar.
- On considère que les pneus sont gonflés à la pression P_1 à la température T_1 , on cherche la température T telle que $P = P_{\max}$. D'après la question 1, on a $P_{\max} = P_1 \frac{T}{T_1}$ donc $T = T_1 \frac{P_{\max}}{P_1}$ soit $T \simeq 516$ °C.

Exercice 2 : POMPE À VIDE

- Entre le moment où le piston est complètement poussé à gauche et celui où il est complètement tiré à droite, la quantité de matière d'air contenu dans l'ensemble enceinte+cylindre reste constante. On peut donc écrire $P_0V = P_1(V + V_0)$.
Donc la pression P_1 est donnée par $P_1 = P_0 \frac{1}{1 + \frac{V_0}{V}} < P_0$
- Pour déterminer la pression P_2 après le deuxième aller-retour, on reprend le raisonnement précédent en remplaçant P_0 par P_1 et P_1 par P_2 . On obtient $P_2 = P_1 \frac{1}{1 + \frac{V_0}{V}}$ soit en notant $\alpha = \frac{1}{1 + \frac{V_0}{V}}$, $P_2 = \alpha^2 P_0$.
- Le même raisonnement (récurrence) donne la pression P_N atteinte au bout de N aller-retours : $P_N = \alpha^N P_0$
- Pour obtenir une pression de 0,001 bar soit $0.001 P_0$, il faut que $\alpha^N = 0.001$, donc $N \ln(\alpha) = \ln(0.001)$ et finalement $N = \frac{\ln(0.001)}{\ln(\alpha)}$. Avec les valeurs données, on trouve $\alpha = 0.995$ et donc $N = 1385$ tours. À 300 tours/min, le temps mis pour obtenir cette pression sera $t \simeq 4,6$ min $\simeq 4$ min 36 s

Exercice 3 : DIFFUSION

- Entre t et $t + dt$, les particules qui traversent le trou sont celles qui se déplacent suivant \vec{e}_x , se trouvent dans un cylindre de section s et de longueur $u dt$. On a donc

$$\delta N_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{6} \frac{N_1}{V} s u dt \quad \text{de même} \quad \delta N_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{6} \frac{N_2}{V} s u dt \quad (1)$$

- On a alors $N_1(t + dt) - N_1(t) = -\delta N_{1 \rightarrow 2} + \delta N_{2 \rightarrow 1}$. Et donc

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{su}{6V} (N_2 - N_1) \quad \text{et} \quad \frac{dN_2}{dt} = \frac{su}{6V} (N_1 - N_2) = -\frac{dN_1}{dt} \quad (2)$$

- Comme le nombre de particules total reste constant au cours du temps, on a $N_2 = N_0 - N_1$, où N_0 est le nombre de particules du compartiment (1) à l'instant initial. On a donc

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{su}{6V} (N_0 - 2N_1) \Leftrightarrow \frac{dN_1}{dt} + \underbrace{\frac{su}{3V}}_{\frac{1}{\tau}} N_1 = \frac{su}{6V} N_0 \quad (3)$$

La solution de cette équation différentielle, en tenant compte de la condition initiale $N_1(0) = N_0$ est :

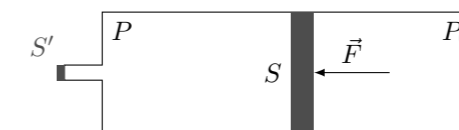
$$N_1(t) = \frac{N_0}{2} (1 + e^{-t/\tau}) \quad \text{et} \quad N_2(t) = \frac{N_0}{2} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (4)$$

- On a $\tau = \frac{3V}{su}$, et en utilisant $\frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T$, on obtient

$$\tau = \frac{V}{s} \sqrt{\frac{3m}{k_B T}} = \frac{V}{s} \sqrt{\frac{3M}{RT}} \quad (5)$$

- On considère que l'air est un gaz parfait constitué de molécules de diazote de masse molaire $M = 28$ g mol⁻¹ et on trouve $\tau = 5,8$ s

Exercice 4 : PRESSION DANS UNE SERINGUE



- Le piston étant à l'équilibre, la somme des forces appliquées est nulle, la force de pression due au gaz à l'intérieur est $F_P = PS$, la force de pression due à l'atmosphère est $F_A = P_0S$ et la force appliquée par la personne est F on a donc $F + P_0S = PS$ l'intérieur de la seringue la pression est donc

$$P = P_0 + \frac{F}{S} = 1 \times 10^5 \text{ Pa} + \frac{10 \text{ N}}{1 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 2 \times 10^5 \text{ Pa} = 2 \text{ bar}$$

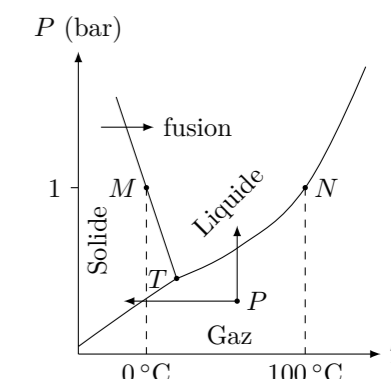
- La force exercée par l'air sur le doigt qui bouche la seringue est $F_D = S'P$, numériquement on trouve $F_D = 0,2 \text{ N} < F$. Il faudrait en réalité prendre aussi en compte les forces de pression exercée par l'atmosphère sur l'autre face du doigt, la force nette exercée sur le doigt deviendrait alors $F_D = 0,1 \text{ N}$.
- On utilise l'équation d'état des gaz parfaits, comme la température et la quantité de matière d'air restent constants lors de la compression on trouve $P_0SL = P_1S(L-d)$ où d est la distance parcourue par le piston lors de la compression. Finalement on trouve $d = \frac{L}{2} = 2,5$ cm

Exercice 5 : CHAUFFAGE D'UNE PIÈCE

- L'énergie interne d'un gaz parfait est $U = C_v T$ avec $C_v = \frac{3}{2} nR$ pour un GP monoatomique. On trouve n grâce à l'équation d'état $n = \frac{P_0V}{RT_1}$ donc $U = \frac{3}{2} P_0V$. Soit $U(T_1) = 6 \times 10^6$ J.
- La quantité d'air initialement contenue dans la pièce est $n = \frac{P_0V}{RT_1}$. Son énergie interne à T_2 est $U(T_2) = \frac{3}{2} nRT_2 = \frac{3}{2} P_0V \frac{T_2}{T_1}$. On trouve $U(T_2) \simeq 6,21 \times 10^6$ J
- L'énergie fournie à l'air de la pièce par le radiateur est donc $\Delta U = 2,1 \times 10^5$ J. Or l'énergie fournie par le radiateur pendant le temps t est $E = Pt$. Il faut donc le laisser allumé pendant $t = \frac{\Delta U}{P}$ soit $t \simeq 100$ s.
- Pour un gaz parfait diatomique $C_v = \frac{5}{2} nR$, tous les résultats sont donc multipliés par $\frac{5}{3}$ par rapport au gaz parfait monoatomique. On aura donc $t \simeq 170$ s. L'hypothèse du GP diatomique est la mieux adaptée à l'air qui est principalement constitué de diazote N_2 et dioxygène O_2 .
- En pratique il faut allumer le radiateur bien plus longtemps car il n'y a pas que l'air à réchauffer, il y a aussi les meubles, les murs,...

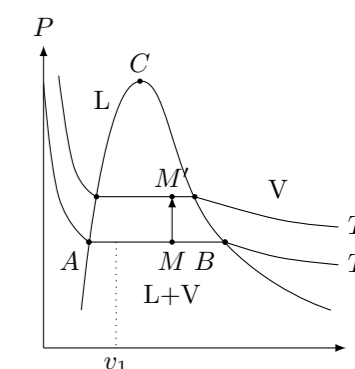
Exercice 6 : DIAGRAMME DE PHASES DE L'EAU

- voir graph.
- Les points M et N correspondent aux températures de fusion et d'ébullition de l'eau à pression ambiante, soit 0 °C et 100 °C.
- La transformation (1) fait passer du solide au liquide, c'est la fusion.
- En P l'eau se trouve sous forme de gaz. Lorsqu'on la refroidit à pression constante elle se condense sous forme solide et lorsqu'on la comprime à température constante elle se liquéfie.
- La pente de la frontière solide-liquide est négative pour l'eau alors qu'elle est positive pour la plupart des autres corps purs.



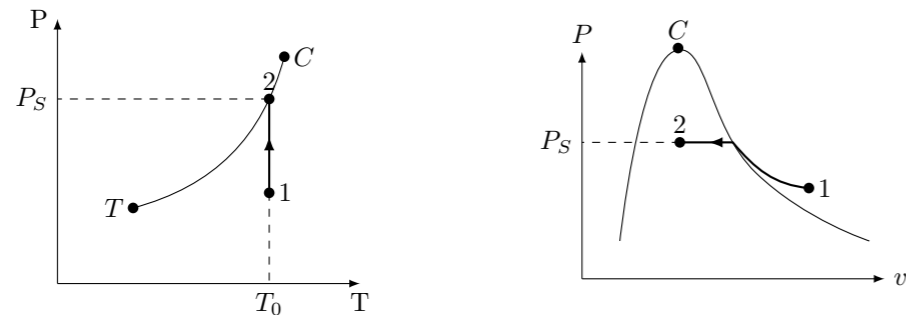
Exercice 7 : DIAGRAMME DE CLAPEYRON

- Voir graph.
- $T_1 > T_2$ car elle est plus proche du point critique.
- Le titre massique x_v en vapeur est donné par $x_v = \frac{AM}{AB}$, graphiquement on trouve $x_v \simeq \frac{2}{3} \simeq 0,7$. Le système est donc composé de 7 g de vapeur et 3 g de liquide.
- Lorsqu'on passe de T_2 à T_1 à volume constant, le système se trouve au point M' et la quantité de vapeur augmente car en M' le titre en vapeur vaut $x_v \simeq 0,8$.
- Voir graph.



Exercice 8 : COMPRESSION ISOTHERME DE VAPEUR D'EAU

- Pour maintenir la température du système constante, il faut qu'il soit en contact avec un thermostat, que ses parois soient diathermes (laissent passer la chaleur) et que la transformation soit lente.
- On a les représentations suivantes :



- À la limite de la liquéfaction, on peut appliquer la formule des gaz parfaits :

$$P_S V_G = nRT_0 \Leftrightarrow V_G = \frac{nRT_0}{P_S} \quad (1)$$

- On sépare le travail reçu en deux étapes :
 - Compression isotherme du gaz parfait :

$$W_1 = nRT_0 \ln \left(\frac{V_1}{V_G} \right) \quad (2)$$

- Compression isobare et isotherme du mélange liquide/gaz :

$$W_2 = P_S (V_G - V_2) \quad (3)$$

et le travail total reçu est

$$W = W_1 + W_2 = nRT_0 \ln \left(\frac{V_1}{V_G} \right) + P_S (V_G - V_2) \quad (4)$$

- On utilise le théorème des moments :

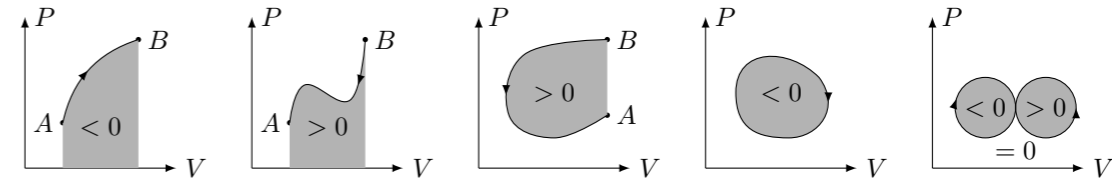
$$n_l = n \frac{V_G - V_2}{V_G - V_L} \approx n \frac{V_G - V_2}{V_G} = n \left(1 - \frac{V_2 P_S}{nRT_0} \right) \quad (5)$$

Exercice 9 : COMPRESSION ISOTHERME D'UN GAZ PARFAIT

- Pour que la compression soit vraiment isotherme il faut que les parois du cylindre conduisent la chaleur, qu'elles soient en contact avec un thermostat à la température T_1 et que la compression soit fait suffisamment lentement.
- La pression est donnée par l'équation d'état des gaz parfaits : $P_2 V_2 = nRT_1$, or on a initialement $P_1 V_1 = nRT_1$, donc $P_2 = P_1 \frac{V_1}{V_2}$.
- La pression du gaz est $P = \frac{nRT_1}{V} = P_1 \frac{V_1}{V}$. Le travail fourni par les forces de pression lors d'une petite variation de volume est $\delta W = -P_e dV = -PdV$. Donc le travail fourni pendant la compression par les forces de pression est $W = \int_{V_1}^{V_2} \delta W = - \int_{V_1}^{V_2} PdV = -P_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = P_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2}$
- Lorsque la compression est adiabatique, on a $P_1 V_1^\gamma = PV^\gamma$ donc $P = P_1 V_1^\gamma / V^\gamma$. On trouve le travail des forces de pression de la même manière qu'à la question précédente : $W = - \int_{V_1}^{V_2} PdV = -P_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma} dV = P_1 V_1^\gamma \frac{1}{\gamma-1} (V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma})$
- En pratique pour effectuer une compression adiabatique, il faudrait que le cylindre soit isolé thermiquement, et il faut que la compression soit rapide.
- Le travail fourni par les forces de pression lors d'une compression adiabatique est plus important que celui fourni lors d'une compression isotherme car le gaz s'échauffe et la pression augmente. L'énergie supplémentaire fournie sert à chauffer le gaz.

Exercice 10 : TRAVAIL DES FORCES DE PRESSION

Le travail des forces de pressions reçu par les système est l'opposé de l'air sous la courbe dans un diagramme (P, V) .
Transfo 1 : négatif ; Transfo 2 : positif ; Transfo 3 : positif ; Transfo 4 : négatif ; Transfo 5 : nul.

**Exercice 11 : CHAUFFAGE D'UNE PISCINE**

On estime la taille d'une piscine olympique à $50 \text{ m} \times 25 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ ce qui fait un volume de $V \approx 2500 \text{ m}^3$ et une masse d'eau $m_e \approx 2,5 \times 10^6 \text{ kg}$. La capacité thermique de l'eau est de $c_e \approx 4,2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Il faudra donc une énergie $E = m_e c_e \Delta T \approx 7,4 \times 10^{10} \text{ J} \approx 2,0 \times 10^4 \text{ kWh}$. Le prix à payer sera donc de l'ordre de 3062 €.

Exercice 12 : OSCILLATIONS D'UN PISTON

- On utilise la loi de Laplace pour relier les pressions et volumes des compartiments de gauche et de droite, on obtient

$$P_g V_g^\gamma = P_0 V_0^\gamma \Leftrightarrow P_g S^\gamma (l_0 + x)^\gamma = P_0 S^\gamma l_0^\gamma \Leftrightarrow P_g = P_0 \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{l_0}} \right)^\gamma \quad (1)$$

et de la même manière, on a

$$P_d = P_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{l_0}} \right)^\gamma \quad (2)$$

- On applique le PFD au piston et on le projette sur l'axe x horizontal orienté vers la droite pour obtenir

$$m\ddot{x} = (P_g - P_d)S \quad (3)$$

On utilise les expressions de P_g et P_d trouvées à la question précédente que l'on développe à l'ordre 1 en $\frac{x}{l_0}$ et on obtient

$$P_g \approx P_0 \left(1 - \gamma \frac{x}{l_0} \right) \quad \text{et} \quad P_d \approx P_0 \left(1 + \gamma \frac{x}{l_0} \right) \quad (4)$$

On a donc l'équation différentielle

$$m\ddot{x} = -2P_0 \gamma S \frac{x}{l_0} \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{2P_0 \gamma S}{ml_0} x = 0 \quad (5)$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2P_0 \gamma S}{ml_0}}$. Donc la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

- Pour déterminer la température finale du système, on cherche son énergie interne. Lorsque l'opérateur tire le piston vers la droite, il fournit un travail au système que l'on peut déterminer en calculant les variations d'énergie interne des parties droite et gauche du cylindre. On a

$$\Delta U_g = C_V \Delta T_g = C_V (T_g - T_0) \quad \text{et} \quad \Delta U_d = C_V \Delta T_d = C_V (T_d - T_0) \quad (6)$$

où T_g et T_d sont les températures des compartiments après l'action de l'opérateur. En utilisant les lois de Laplace, on a $T_g = T_0 \left(\frac{V_0}{V_g} \right)^{\gamma-1}$ et $T_d = T_0 \left(\frac{V_0}{V_d} \right)^{\gamma-1}$. Et on obtient en exprimant V_0 , V_g et V_d en fonction de l_0 et x_0 :

$$\Delta U = \Delta U_g + \Delta U_d = C_V T_0 \left(\left(\frac{l_0}{l_0 - x_0} \right)^{\gamma-1} + \left(\frac{l_0}{l_0 + x_0} \right)^{\gamma-1} - 2 \right) \quad (7)$$

Comme on a $C_V T_f = C_V T_0 + \Delta U$, on trouve que

$$T_f = T_0 + \frac{\Delta U}{C_V} = T_0 \left(\left(\frac{l_0}{l_0 - x_0} \right)^{\gamma-1} + \left(\frac{l_0}{l_0 + x_0} \right)^{\gamma-1} - 1 \right) \quad (8)$$

Remarque : On pourrait faire un développement limité à l'ordre 2 en $\frac{x_0}{l_0}$ et montrer que ΔU correspond à l'énergie potentielle élastique de l'oscillateur harmonique à l'instant initial $\Delta U = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2$.