TD14 : Solide en rotation autour d'un axe fixe – corrigé

Exercice 1 : Moments d'inertie

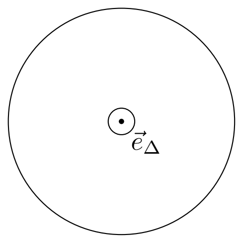
Les solides qui ont leur masse le plus loin de l'axe ont un moment d'inertie supérieur. Donc J_2 et J_4 sont supérieurs à J_1 et J_3.

Entre 2 et 4 on remarque que les masses du carré (4) sont en moyenne plus éloignées que celles du cercle et donc $J_4 > J_2$. Il en est de même pour les solides pleins, on a finalement :

$$\boxed{J_4 > J_2 > J_3 > J_1}$$

Remarque : On n'a pas strictement démontré que $J_2 > J_3$ mais on *sent bien* que ça doit être le cas.

Exercice 2 : Calcul de moment d'inertie

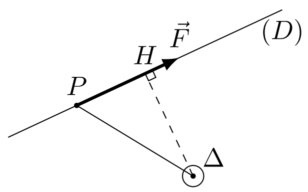


1. Schéma ci-contre.
2. $L_\Delta = J_\Delta \Omega$
3. Un point M de masse dm du solide possède un moment cinétique par rapport à Δ : $d\sigma_\Delta = dmr^2\Omega$ car la vitesse du point M est orthogonale à l'axe Δ et vaut $v = r\Omega$. Ce résultat est identique pour tous les points du solide.
4. Le moment cinétique total du solide est la somme des moments cinétiques des points qui le composent :

$$L_\Delta = \sum_{\text{solide}} d\sigma_\Delta = \sum_{\text{solide}} dmr^2\Omega = r^2\Omega \sum_{\text{solide}} dm = mr^2\Omega = J_\Delta\Omega$$

On en déduit que $\boxed{J_\Delta = mr^2}$

Exercice 3 : Constance du moment



Si on appelle H le projeté orthogonal du point O appartenant à Δ sur la droite (D), le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à Δ s'écrit

$$\Gamma_\Delta = ||\vec{OP} \wedge \vec{F}|| = ||(\vec{OH} + \vec{HP}) \wedge \vec{F}|| = ||\vec{OH} \wedge \vec{F}||$$

car $\vec{HP} \wedge \vec{F} = 0$. Ce résultat ne dépend pas du point P d'application de la force sur la droite (D), le moment de la force est donc constant.

Exercice 4 : Moments de forces

1. $\Gamma = -rF\sin(\pi/4) = -\frac{rF}{\sqrt{2}}$
2. $\Gamma = 0$
3. $\Gamma = Fr$
4. $\Gamma = -Fr$ (*cf* exercice précédent)

Exercice 5 : Fluctuation du couple d'une machine tournante

1. On applique la loi du moment cinétique à la machine tournante, on obtient

$$J_\Delta\dot{\Omega} = -k\Omega + \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_m\cos(\omega t) \Leftrightarrow \dot{\Omega} + \frac{k}{J_\Delta}\Omega = \frac{1}{J_\Delta}(\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_m\cos(\omega t)) \tag{1}$$

2. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, les solutions sont de la forme

$$\Omega(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \Omega_p(t) \tag{2}$$

où $\Omega_p(t)$ est une solution particulière de l'équation différentielle, et $\tau = \frac{J_\Delta}{k}$. Le premier terme tend vers 0 au bout de quelques τ, donc après ce temps, il ne reste plus que le second terme qui correspond au régime établi. $\Omega_p(t)$ est de la même forme que le second membre de l'équation différentielle, on le cherche donc sous la forme $\Omega_p(t) = A + B\cos(\omega t + \varphi)$. On trouve rapidement que $A = \frac{\mathcal{M}_0}{k}$, il s'agit de la composante continue de la vitesse angulaire et pour déterminer la partie oscillante $\Omega_o(t)$ on utilise la méthode des complexes :

$$j\omega\underline{\Omega}_o + \frac{k}{J_\Delta}\underline{\Omega}_o = \frac{\mathcal{M}_m}{J_\Delta}\exp(j\omega t) \Leftrightarrow \underline{\Omega}_o = \frac{\frac{\mathcal{M}_m}{k}}{1 + j\frac{\omega J_\Delta}{k}}\exp(j\omega t) \tag{3}$$

3. L'amplitude des oscillations de la vitesse angulaire de la machine sera donc

$$|\underline{\Omega}_o| = \frac{\frac{\mathcal{M}_m}{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega J_\Delta}{k}\right)^2}} \tag{4}$$

On voit que lorsque $\omega \to \infty$, l'amplitude des oscillations tend vers 0, il s'agit donc d'un filtre passe-bas de pulsation de coupure $\omega_c = \frac{k}{J_\Delta}$.

4. Pour réduire les fluctuations de Ω, il faut augmenter le moment d'inertie J_Δ.

Exercice 6 : Manège

1. Le moment cinétique d'une nacelle par rapport à l'axe Δ est $\sigma_\Delta = mr^2\omega$. Le moment cinétique de l'ensemble du manège est donc $L_\Delta = 8mr^2\omega$.
2. On en déduit que le moment d'inertie du manège par rapport à l'axe Δ est $\boxed{J_\Delta = 8mr^2}$.
3. L'accélération angulaire est $\dot{\omega} = \frac{\omega_f}{T}$. Le théorème du moment cinétique donne $J_\Delta\dot{\omega} = \Gamma$, on en déduit que $\boxed{\Gamma = J_\Delta\frac{\omega_f}{T}}$.
4. L'énergie cinétique du manège est donnée par $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$. Or $\omega(t) = \omega_f\frac{t}{T}$, donc entre 0 et T l'énergie cinétique est donnée par

$$E_c = \frac{J_\Delta\omega_f^2}{2T^2}t^2 \tag{1}$$

5. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au solide en rotation donne $\frac{dE_c}{dt} = P$ ou P est la puissance des forces appliquées au manège et donc la puissance fournie par le moteur. Donc

$$P(t) = \frac{J_\Delta\omega_f^2 t}{T^2} \tag{2}$$

elle augmente linéairement et atteint sa valeur maximale à $t = T$. Le moteur utilisé doit donc être capable de fournir au moins cette valeur max qui vaut :

$$P = \frac{J_\Delta\omega_f^2}{T} \tag{3}$$

6. Chaque nacelle peut accueillir 8 personnes, on peut donc estimer que $m \simeq 1000\,\text{kg}$ (masse des personnes + nacelle). L'accélération subie par les passagers est une accélération centripète due à la trajectoire circulaire, la valeur de cette accélération est $4g = r\omega_f^2$ donc $\omega_f = \sqrt{\frac{4g}{r}}$ et $T = 60\,\text{s}$. On en déduit que

$$P = \frac{J_\Delta\omega_f^2}{T} = \frac{8mr \times 4g}{T} \quad \text{soit} \quad P \simeq 52\,\text{kW} \tag{4}$$

Exercice 7 : Treuil

1. Lorsque le cylindre est bloqué, la masse m est immobile. Les forces qu'elle subit sont : son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du fil. Leur résultante étant nulle, on obtient $\vec{T} = -m\vec{g}$.
2. La hauteur de la masse est reliée à l'angle dont le cylindre a tourné par : $h(t) = -r\theta(t)$
3. L'application du PFD à la masse m dont la hauteur est notée $h(t)$, en le projetant sur l'axe Oz vertical dirigé vers le haut donne $\boxed{m\ddot{h}(t) = T - mg}$.
4. Le théorème du moment cinétique appliqué au cylindre est :

$$J_\Delta \dot{\omega} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = rT. \tag{1}$$

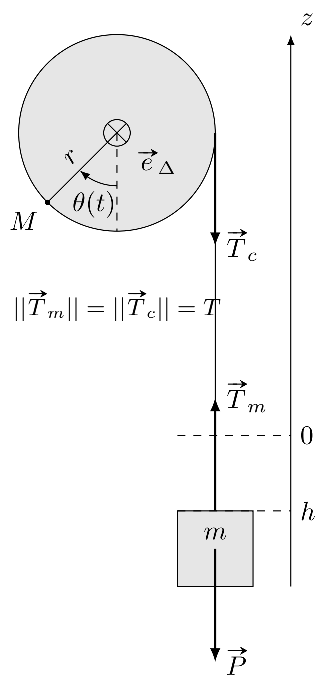
5. La questions 3 et 2 permettent d'obtenir $T = m(g - r\ddot{\theta})$. En substituant cette expression dans l'équation 1 on obtient : $J_\Delta \dot{\omega} = mr(g - r\dot{\omega})$, soit en isolant $\dot{\omega}$:

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{mrg}{J_\Delta + mr^2} \tag{2}$$

6. On a

$$a = -r\alpha = -\frac{mr^2 g}{J_\Delta + mr^2} \quad \text{soit} \quad |a| = g\frac{1}{1 + J_\Delta/mr^2} < g\,. \tag{3}$$

   $\boxed{\text{L'accélération}}$ est inférieure à l'accélération lors d'une chute libre qui vaut g.
7. $\boxed{a \simeq 3{,}27\,\mathrm{m\,s^{-2}}}$ et $\boxed{\alpha \simeq 32{,}7\,\mathrm{rad\,s^{-2}}}$
8. On peut facilement trouver l'énergie cinétique de l'ensemble car en l'absence de frottements, l'énergie mécanique est conservée et l'énergie cinétique gagné par l'ensemble est égale à l'énergie potentielle perdue par la masse m. On a donc $\boxed{E_c = -mgh}$.



Exercice 8 : Pendule de torsion

On étudie un pendule de torsion constitué d'un solide S relié à un axe Δ par une liaison pivot. Le moment d'inertie de S par rapport à Δ est J_Δ. Le solide S est accroché à un ressort à spirale qui exerce un couple de rappel Γ proportionnel à son angle θ de rotation : $\Gamma = -C\theta$.

À $t = 0$ le solide est lâché sans vitesse angulaire initiale à un angle de rotation θ_0.

1. Le théorème du moment cinétique appliqué au solide S donne directement $J_\Delta\ddot{\theta} = \Gamma = -C\theta$. On a donc l'équation différentielle : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0}$,

   C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique non amorti.
2. La résolution de cette équation différentielle donne $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$, les conditions initiales donnent $\varphi = 0$ et $A = \theta_0$. On a donc $\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)}$.
3. Dans la résolution du pendule de torsion, on n'a pas eu besoin de faire l'approximation des petits angles, les oscillations auront la même période quelle que soit leur amplitude. Ce type de pendule est utilisé dans les montres et horloges mécaniques.