TD13 : Mouvement de particules chargées – corrigé

Exercice 1 : Oscilloscope analogique

1. Le champ électrique est $\vec{E} = -\frac{U}{d}\vec{e}_y$.
2. On considère que la seule force appliquée sur un électron est la force électrique $\vec{F} = -e\vec{E}$. Et on obtient un mouvement de vecteur accélération constant $\vec{a} = \frac{Ue}{m_e d}\vec{e}_y$. On en déduit ,en utilisant les conditions initiales $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$ et $\dot{y}(0) = 0$, que le mouvement des électrons est

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \frac{Ue}{2dm_e}t^2 \end{cases} \tag{1}$$

3. Un électron sort de la zone de champ électrique au bout d'un temps $t_0 = \frac{\ell}{v_0}$. À cet instant il se trouve en

$$x(t_0) = \ell \quad \text{et} \quad y(t_0) = \frac{Ue}{2dm_e}\frac{\ell^2}{v_0^2} \tag{2}$$

et les composantes de son vecteur vitesse sont

$$\dot{x}(t_0) = v_0 \quad \text{et} \quad \dot{y}(t_0) = \frac{Ue}{dm_e}\frac{\ell}{v_0} \tag{3}$$

Comme l'électron n'est plus soumis à aucune force, sa trajectoire est rectiligne uniforme et on trouve l'équation du mouvement suivante

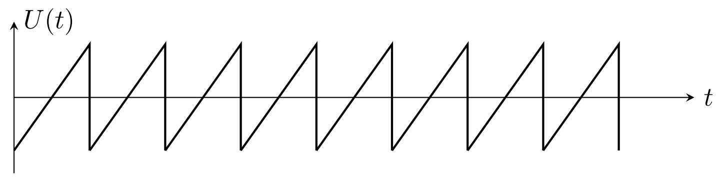
$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = y(t_0) + \dot{y}(t_0)(t - t_0) \end{cases} \tag{4}$$

4. L'électron impacte l'écran au temps $t_1 = t_0 + \frac{\ell'}{v_0}$. En injectant cette expression dans $y(t)$, on obtient

$$y(t_1) = y(t_0) + \dot{y}(t_0)\frac{\ell'}{v_0} = \frac{Ue\ell^2}{2dm_e v_0^2} + \frac{Ue\ell\ell'}{dm_e v_0^2} = \frac{Ue\ell}{2dm_e v_0^2}(\ell + 2\ell') \tag{5}$$

qui est bien proportionnelle à U. Cette propriété est très utile pour un oscilloscope analogique où on souhaite que la déviation verticale soit proportionnelle à la tension d'entrée. Il suffit donc d'appliquer entre les plaques de déviation une tension proportionnelle à la tension d'entrée de l'oscilloscope.

5. Pour assurer un balayage horizontal périodique à vitesse constante, il faut que la tension appliquée aux plaques de déviation horizontale soit en forme de *dents de scien*



Exercice 2 : Cyclotron

1. La force de Lorentz subie par un proton est

$$\vec{F}_L = e\vec{v} \wedge \vec{B} \tag{1}$$

Elle est toujours perpendiculaire à la vitesse $\vec{v}$ du proton et donc son travail est nul. Le théorème de l'énergie cinétique permet de montrer que la vitesse du proton est constante dans un dé.

Pour déterminer le rayon, on suppose que la trajectoire est circulaire uniforme, l'accélération est uniquement centripète et vaut $\frac{v_0^2}{R}$. Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire que cette accélération est égale à $\frac{F_L}{m}$ donc on trouve

$$\frac{v_0^2}{R} = \frac{ev_0B}{m} \Leftrightarrow R = \frac{v_0}{\omega_c} \tag{2}$$

2. Pour faire un demi-tour dans le dé, le proton met un temps

$$T_0 = \frac{\pi R}{v_0} = \frac{\pi}{\omega_c} = 3{,}28 \times 10^{-8}\,\mathrm{s} \tag{3}$$

Ce temps est indépendant de la vitesse du proton.

3. Pour que le champ accélère au mieux les protons, il faut que ses variations soient synchronisées avec le passage des protons dans la zone d'accélération. La fréquence doit donc être

$$f = \frac{1}{2T_0} = \frac{\omega_c}{2\pi} \approx 1{,}52 \times 10^7\,\mathrm{Hz} = 15{,}2\,\mathrm{MHz} \tag{4}$$

4. L'augmentation d'énergie cinétique d'un proton à chaque accélération est

$$\Delta E_c = eU \approx 4{,}01 \times 10^{-16}\,\mathrm{J} = 2{,}50 \times 10^3\,\mathrm{eV} \tag{5}$$

5. Le proton subit une accélération par demi-tour, donc pour connaitre le nombre de demi-tours, on divise l'énergie cinétique finale du proton par ΔE_c, on obtient

$$N = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}mv_f^2}{\Delta E_c} = 652\,\text{tours} \tag{6}$$

Le temps nécessaire est $T = \frac{N}{f} \approx 43\,\mu\mathrm{s}$

6. Le rayon du dernier arc de cercle parcouru par les protons est :

$$R_f = \frac{v_f}{\omega_c} \approx 26{,}1\,\mathrm{cm} \tag{7}$$

Ce rayon est suffisamment faible pour que le cyclotron utilisé soit assez petit.

Exercice 3 : Selecteur d'isotopes

1. L'énergie cinétique des ions qui arrivent est $E_c = eU = \frac{1}{2}mv^2$, où m est la masse d'un ion. On obtient donc la vitesse :

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \tag{1}$$

et on obtient les valeurs numériques suivantes :
- $v_1 \approx 4{,}38 \times 10^5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ pour ${}^{20}_{10}\mathrm{Ne}^+$
- $v_2 \approx 4{,}17 \times 10^5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ pour ${}^{22}_{10}\mathrm{Ne}^+$

2. Dans la zone de champs, les ions possédants une vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$ sont soumis à la force de Lorentz :

$$\vec{F}_L = e\vec{E} + e\vec{v} \wedge \vec{B} = eE\vec{e}_y + evB\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z = e(E - vB)\vec{e}_y \tag{2}$$

Cette force est nulle à condition que $E = vB$. Pour les ions ${}^{20}_{10}\mathrm{Ne}^+$, on doit avoir un champ $E = 4{,}38 \times 10^4\,\mathrm{V\,m^{-1}}$

3. Dans ce cas, les ions ${}^{22}_{10}\mathrm{Ne}^+$ayant une vitesse plus faible, ils subiront une force suivant $\vec{e}_y$ et ne pourront pas passer à travers l'ouverture en O. On peut utiliser ce dispositif pour séparer différents isotopes d'un même élément chimique.

Exercice 4 : Champs électrique et magnétique croisés

1. On applique le principe fondamentale de la dynamique au point M, en négligeant les forces autres que la force de Lorentz. On obtient

$$m\vec{a} = m(\ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y) = \vec{F}_L = -eE\vec{e}_x - e\vec{v} \wedge B\vec{e}_z = -eE\vec{e}_x - eB\left(\dot{y}\vec{e}_x - \dot{x}\vec{e}_y\right) \tag{1}$$

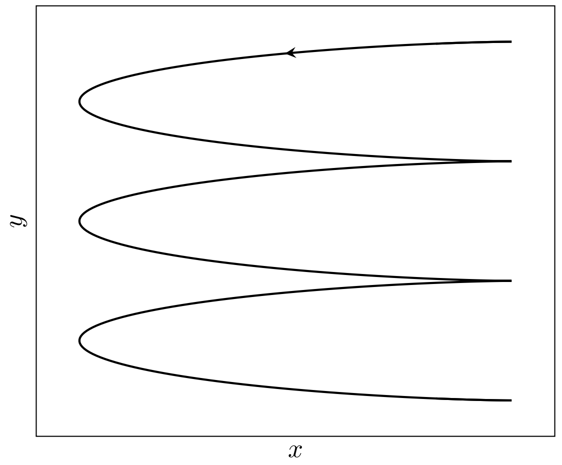
Ce qui donne les équations différentielles

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{eE}{m} - \frac{eB}{m}\dot{y} \\ \ddot{y} = \frac{eB}{m}\dot{x} \end{cases} \tag{2}$$

2. On intègre la seconde équation entre 0 et t pour obtenir

$$\int_0^t \ddot{y}(u)\mathrm{d}u = \omega_c \int_0^t \dot{x}(u)\mathrm{d}u \Leftrightarrow \dot{y}(t) - \underbrace{\dot{y}(0)}_{=0} = \omega_c(x(t) - \underbrace{x(0)}_{=0}) \Leftrightarrow \dot{y}(t) = \omega_c x(t) \tag{3}$$

3. On obtient l'équation différentielle en $x(t)$:
$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = -\frac{eE}{m} \tag{4}$$
C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti de pulsation ω_c. La solution générale est
$$x(t) = A\cos(\omega_c t) + B\sin(\omega_c t) - \underbrace{\frac{eE}{m\omega_c^2}}_{\frac{E}{B\omega_c}} \tag{5}$$
On détermine les constantes A et B avec les conditions initiales ($x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$). On trouve $B = 0$ et $A = \frac{E}{B\omega_c}$ ce qui conduit bien à l'expression demandée.
4. On a
$$\ddot{y} = \omega_c \dot{x} = -\frac{E\omega_c}{B}\sin(\omega_c t) \tag{6}$$
Que l'on intègre une première fois pour trouver
$$\dot{y} = \frac{E}{B}\cos(\omega_c t) + K_1 \tag{7}$$
Comme $\dot{y}(0) = 0$, on trouve $K_1 = -\frac{E}{B}$. En intégrant une seconde fois, on obtient
$$y(t) = \frac{E}{B\omega_c}\sin(\omega_c t) - \frac{E}{B}t = \frac{E}{B}\left(\frac{1}{\omega_c}\sin(\omega_c t) - t\right) \tag{8}$$
5. On obtient la trajectoire suivante :



On détermine la valeur moyenne de $\dot{x}$ et de $\dot{y}$. On trouve que $\langle\dot{x}\rangle = 0$ et $\langle\dot{y}\rangle = -\frac{E}{B}$. La vitesse moyenne de l'électron est donc $-\frac{E}{B}\vec{e}_y$.