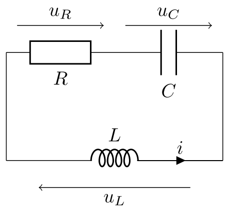
# Oscillateurs

## L'oscillateur harmonique amorti

**Exemple :** circuit RLC série




Équation différentielle satisfaite par i(t) :

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{\omega_0/Q}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} i = 0$$

Équation différentielle d'un oscillateur harmonique en régime libre

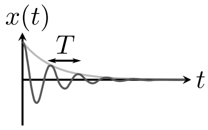
$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Ou constante

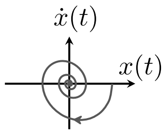
### $Q > \frac{1}{2}$ régime pseudo-périodique

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau}\cos(\omega t + \varphi)$$

$\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$, $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$




Évolution temporelle

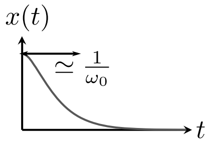



Portrait de phase

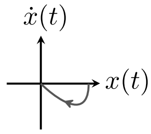
### $Q = \frac{1}{2}$ régime critique

$$x(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$$

retour à l'équilibre le plus rapide




Évolution temporelle

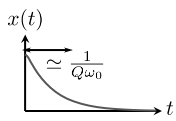



Portrait de phase

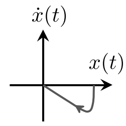
### $Q < \frac{1}{2}$ régime apériodique

$$x(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$$

$$r_{1,2} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\pm\sqrt{1 - 4Q^2} - 1\right)$$




Évolution temporelle

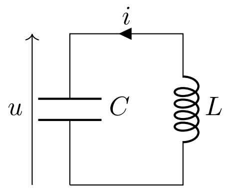


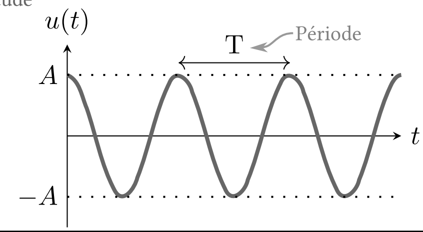

Portrait de phase

## L'oscillateur harmonique

Équation différentielle $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u = 0}$

Solution $\boxed{u(t) = \underbrace{A}_{\text{Amplitude}}\sin(\underbrace{\omega_0 t + \varphi}_{\text{Phase}})}$



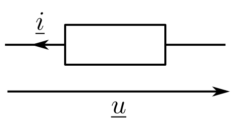

## Méthode complexe

$$\boxed{\underset{\text{grandeur réelle}}{x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)} \longrightarrow \underset{\text{grandeur complexe}}{\underline{x}(t) = Xe^{j(\omega t + \varphi)}}}$$

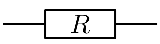
$\dot{\underline{x}} = j\omega\underline{x}$ $\quad x = Re(\underline{x})$

$\ddot{\underline{x}} = -\omega^2\underline{x}$ $\quad X = |\underline{x}|$ $\quad \omega t + \varphi = \arg(\underline{x})$

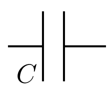
### Impédance complexe




$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$




Résistance $\quad \underline{Z}_R = R$



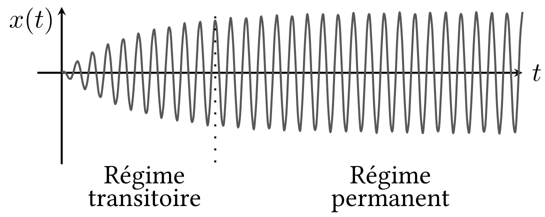

Condensateur $\quad \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$


Bobine $\quad \underline{Z}_L = jL\omega$

Tout fonctionne comme pour des résistances : associations série/parallèle, ponts diviseurs, ...

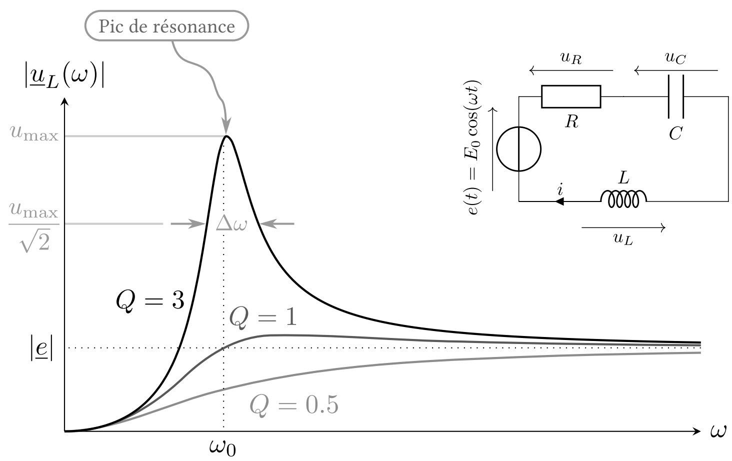
## Régime sinusoïdal forcé

Le système est soumis à une excitation sinusoïdale




On étudie le régime permanent où toutes les grandeurs oscillent sinusoïdalement à la pulsation ω

## Résonance




Plus le facteur de qualité est élevé, plus la résonance est étroite

$$\boxed{\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q}$$