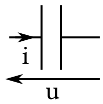
Circuits électriques du 1er Ordre

le condensateur



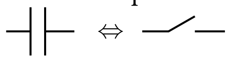
$i = C\frac{du}{dt}$

Modèle équivalent en régime permanent

En régime permanent (continu) on a $u(t) = \text{constante}$

donc $i(t) = 0$

En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert



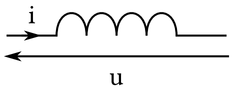
Propriétés de continuité

Il n'y a pas de saut de tension aux bornes d'un condensateur.

ex : Si la tension est nulle à t=0⁻, elle reste nulle à t=0⁺

Cette propriété permet de relier la tension avant fermeture d'un interrupteur (régime permanent) à la tension après sa fermeture.

La bobine



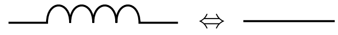
$u = L\frac{di}{dt}$

Modèle équivalent en régime permanent

En régime permanent (continu) on a $i(t) = \text{constante}$

donc $u(t) = 0$

En régime permanent, la bobine est équivalente à un fil



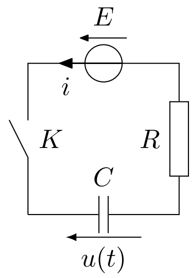
Propriétés de continuité

Il n'y a pas de saut d'intensité dans une bobine.

ex : Si l'intensité est nulle à t=0⁻, elle reste nulle à t=0⁺

Cette propriété permet de relier l'intensité avant fermeture d'un interrupteur (régime permanent) à l'intensité après sa fermeture.

Étude qualitative (circuit RC)



- Pour t<0, K est ouvert, et le condensateur C est déchargé.
-À t=0 on ferme K et on cherche à déterminer u(t)

Régime permanent

En régime permanent le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert donc :

$i(\infty) = 0$

$u(\infty) = E - Ri(\infty) = E$

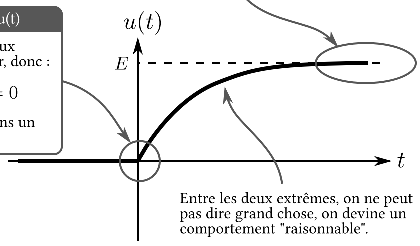
Loi des mailles et loi d'Ohm

Continuité de la tension u(t)

La tension est continue aux bornes d'un condensateur, donc :

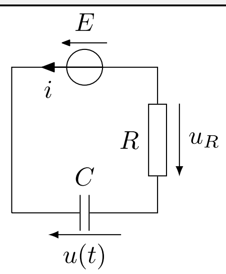
$u(0^+) = u(0^-) = 0$

Pas de saut de tension dans un condensateur



Entre les deux extrêmes, on ne peut pas dire grand chose, on devine un comportement "raisonnable".

Étude quantitative (circuit RC)



Loi des mailles : $E = u + u_R$

Loi d'Ohm : $u_R = Ri$

Condensateur : $i = C\frac{du}{dt}$

À partir de ces équations, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{\tau}$$

Équation homogène

$\frac{du_H}{dt} + \frac{1}{\tau}u_H = 0$

$u_H(t) = Ae^{-t/\tau}$

Solution particulière

Le second membre est constant, on cherche : $u_P(t) = \text{cste}$

$u_P(t) = E$

Solution générale

$u(t) = u_H(t) + u_P(t)$

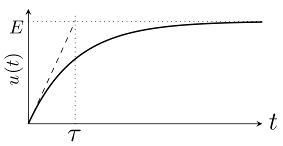
$= Ae^{-t/\tau} + E$

Conditions initiales

$u(0) = 0 \Leftrightarrow A = -E$

$\boxed{u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})}$

$i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$



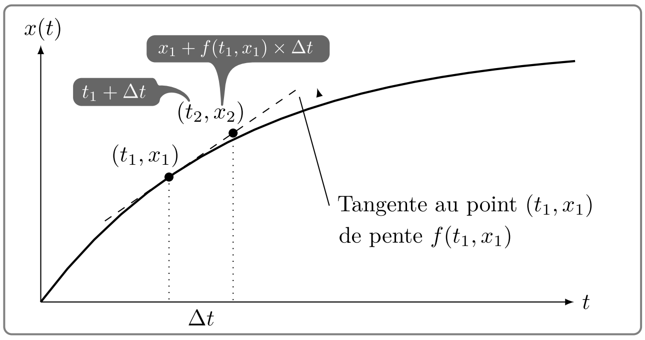
Résolution numérique – méthode d'Euler

Équation différentielle d'un circuit d'ordre 1 :

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau}x = e(t) \xrightarrow{\text{devient}} \frac{dx}{dt} = \underbrace{e(t) - \frac{1}{\tau}x}_{f(t,x)} = f(t,x)$$

excitation

Approximation : $\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$



Bilan d'énergie (circuit RC)

Énergie fournie par le générateur :

$$E_g = \int_{t=0}^{\infty} P_g(t)\,dt = \int_0^{\infty} E \cdot i(t)dt = \int_0^{\infty} \frac{E^2}{R}e^{-t/\tau}dt = CE^2$$

Énergie stockée par le condensateur :

$$E_C = \frac{1}{2}Cu(\infty)^2 - \frac{1}{2}Cu(0)^2 = \frac{1}{2}CE^2$$

Énergie dissipée par la résistance :

$$E_R = \int_{t=0}^{\infty} P_R(t)\,dt = \int_0^{\infty} R \cdot i^2(t)dt = \int_0^{\infty} \frac{E^2}{R}e^{-2t/\tau}dt = \frac{1}{2}CE^2$$

Conservation de l'énergie : $E_g = E_C + E_R$