DS8 : Mécanique et Thermodynamique

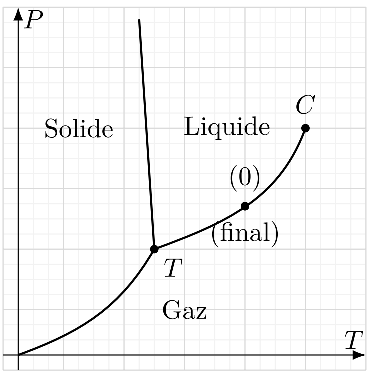
Exercice 1 : Détente isotherme d'un mélange de corps purs

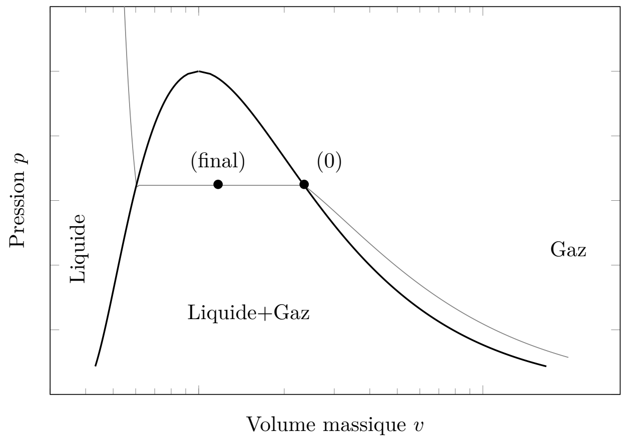
I – Corps pur (eau) sans diazote

1. Le système est constitué de vapeur saturante à T_0 , on a donc $p_{E,0} = p_{\text{sat}} = 2{,}00 \times 10^4\,\text{Pa}$.
2. On utilise l'équation d'état des gaz parfaits

$$\boxed{V_0 = \frac{n_E R T_0}{p_{\text{sat}}} = 41{,}5\,\ell} \tag{1}$$

3. Ci-dessous les diagrammes pression-température (à gauche) et de Clapeyron (à droite de l'eau). On a représenté le point (0) représentatif du corps pur dans l'état initial.





4. Puisque l'on néglige le volume de la phase liquide et que l'on divise par 2 le volume de la phase gazeuse (à pression et température constante car mélange L/G), alors la quantité de matière en phase gazeuse est divisée par 2 entre l'état initial et l'état final. Or initialement 100 % de la masse d'eau était sous forme gazeuse. Dans l'état final il n'y en a plus que $x_1 = 50\,\%$. Comme l'état final est toujours un état d'équilibre liquide/vapeur, le point ne bouge pas dans le diagramme (P, T).
5. Comme la pression est constante au cours de la transformation, et la transformation est quasistatique, alors le travail reçu au cours de la transformation est

$$\boxed{W = -\int_{V_0}^{V_0/2} p_{\text{sat}} \mathrm{d}V = -p_{\text{sat}} \int_{V_0}^{V_0/2} \mathrm{d}V = \frac{p_{\text{sat}} V_0}{2} = 415\,\text{J}} \tag{2}$$

II – Transformation d'un mélange diazote/eau

6. Pour que la vapeur d'eau soit sous forme de vapeur sèche, il faut que $p_E < p_{\text{sat}}$.
   Supposons que l'eau soit entièrement sous forme de vapeur sèche. Dans ces conditions, la pression partielle de vapeur d'eau est $p_E = x_E p_{\text{tot}} = \frac{n_E}{n_E + n_N} p_{\text{tot}} = 2{,}25 \times 10^4\,\text{Pa}$. Comme $p_E > p_{\text{sat}}$, la vapeur d'eau n'est pas sous forme de vapeur sèche, il existe de l'eau sous forme liquide et la vapeur d'eau est saturante à la pression $p_E = p_{\text{sat}}$.
7. Dans cet état initial, la pression partielle de vapeur d'eau est p_{sat}. Et la pression partielle du diazote est $p_N = p_{\text{tot},2} - p_E = 1{,}00 \times 10^4\,\text{pascal}$.

8. L'équation d'état des gaz parfait appliquée à N_2 permet d'obtenir le volume du système :

$$\boxed{V_2 = \frac{n_N R T_0}{p_N} = 27{,}7\,\ell} \tag{3}$$

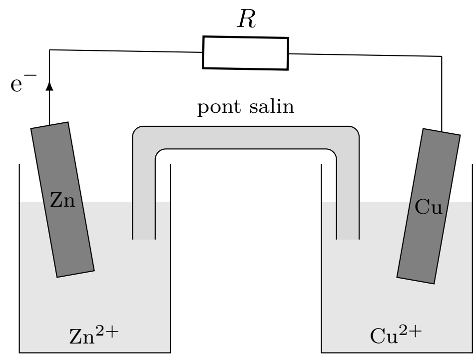
9. La quantité de matière d'eau sous forme de vapeur est donnée par l'équation des gaz parfaits :

$$\boxed{n_{E,\text{vap},2} = \frac{p_E V_1}{R T_0} = 0{,}2\,\text{mol} \quad \text{et on a} \quad n_{E,\text{liq},2} = n_E - n_{E,\text{vap},2} = 0{,}1\,\text{mol}} \tag{4}$$

10. La pression finale totale est égale à la pression de vapeur saturante, or la pression partielle de l'eau est strictement inférieure à la pression totale (à cause de la présence de N_2). On en déduit que la pression de vapeur d'eau est strictement inférieure à la pression de vapeur saturante et donc que l'eau est sous forme de vapeur sèche .

Exercice 2 : Moxie (d'après CCINP TSI 2023)

1. Schéma de la pile :



2. Vu les potentiels standards, l'anode est constituée par la plaque de zinc et la cathode par la plaque de cuivre. Les équations qui ont lieu aux électrodes sont
   - Anode : $Zn(s) \longrightarrow Zn^{2+} + 2\,e^-$ (oxydation)
   - Cathode : $Cu^{2+} + 2\,e^- \longrightarrow Cu(s)$ (réduction)
3. Dans les fils électriques, les porteurs de charge sont les électrons chargés négativement, ils vont du zinc vers le cuivre.
4. Les porteurs de charge dans le pont salin sont des ions. Le pont salin sert à fermer le circuit électrique pour permettre de conserver l'électro-neutralité des deux demi-piles lors du fonctionnement de la pile.
5. L'espèce chimique qui est oxydée est H_2 car le potentiel standard du couple $H_2(g) / H_2O(\ell))$ est nul (ESH), c'est donc cette espèce qui constitue le combustible.
6. Les demi-équations électroniques sont

$$\boxed{O_2(g) + 4\,H^+(aq) + 4\,e^- \rightleftharpoons 2\,H_2O(\ell) \quad \text{et} \quad 2\,H^+(aq) + 2\,e^- \rightleftharpoons H_2(g)} \tag{1}$$

7. La formule de Nernst appliquée aux deux couples donne :

$$\boxed{E(O_2 / H_2O) = E^\circ(O_2 / H_2O) + \frac{0{,}06}{4} \log\left(\frac{p(O_2)[H^+]^4}{p^\circ {c^\circ}^4}\right)} \tag{2}$$

et

$$\boxed{E(H_2O / H_2) = E^\circ(H_2O / H_2) + \frac{0{,}06}{2} \log\left(\frac{[H^+]^2 p^\circ}{p(H_2) {c^\circ}^2}\right)} \tag{3}$$

8. La force électromotrice de la pile est la différence de potentiel entre les deux électrodes et vaut

$$\boxed{e = E(O_2\,/\,H_2O) - E(H_2O\,/\,H_2) = E^\circ(O_2\,/\,H_2O) - E^\circ(H_2O\,/\,H_2) + \frac{0{,}06}{4}\log\left(\frac{p(O_2)p(H_2)^2}{p^{\circ 3}}\right)} \quad (4)$$

9. ① : $H_2(g)$; ② : air dont $O_2(g)$; ③ : électrons ; ④ : $H_2O(\ell) + H_2(g)$; ⑤ : air appauvri ; ⑥ : O^{2-} ; ⑦ : cathode ; ⑧ : anode .
10. L'équation de l'électrolyse de l'eau est $2\,H_2O(\ell) \rightleftharpoons 2\,H_2(g) + O_2(g)$
11. L'équation bilan de l'électrolyse du CO_2 de l'atmosphère martienne est $2\,CO_2(g) \rightleftharpoons 2\,CO\,(g) + O_2(g)$.
12. D'après l'équation de la réaction d'électrolyse de CO_2 obtenue à la question précédente, la quantité $n_{O_2,f}$ de O_2 formée est liée à la quantité $n_{CO_2,c}$ consommée par $n_{CO_2,c} = 2n_{O_2,f}$. Les masse $m_{CO_2,c}$ et $m_{O_2,f}$ sont donc reliées par $\frac{m_{CO_2,c}}{M_{CO_2}} = 2\frac{m_{O_2,f}}{M_{O_2}}$ et donc la masse de CO_2 consommée pour produire 1 g de O_2 est

$$\boxed{m_{CO_2,c} = 2\frac{M_{CO_2}}{M_{O_2}} m_{O_2,f} = 2{,}8\,\mathrm{g}} \quad (5)$$

13. D'après l'énoncé, MOXIE a produit 5,4 g de O_2 en $\Delta t = 1\,\mathrm{h}$. La quantité d'électrons ayant circulé dans l'électrolyseur est $n_{e^-} = 4n_{O_2}$ (d'après la figure 2). Donc l'intensité du courant qui a circulé est

$$\boxed{I = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{\mathcal{F}n_{e^-}}{\Delta t} = 4\mathcal{F}\frac{m_{O_2}}{M_{O_2}}\frac{1}{\Delta t} = 18\,\mathrm{A}} \quad (6)$$

Exercice 3 : Mouvement d'une goutte autour d'une aiguille

I – Force et énergie potentielle

1. La force exercée par un champ électrostatique $\vec{E}$ sur une charge q est $\vec{F} = q\vec{E}$ donc ici, on a

$$\vec{F}(r) = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r \quad (1)$$

2. Dans le cas d'une force centrale conservative, on a $\vec{F}(r) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$. On cherche donc une primitive de $F(r)$ pour trouver

$$\boxed{E_p(r) = -\frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r)} \quad (2)$$

II – Mouvement sans frottements

3. On applique le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Oz à la goutte dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La seule force appliquée est la force électrique $F(r)\vec{e}_r$ dont le moment est nul car elle est dirigée vers l'axe. Donc le moment cinétique par rapport à l'axe Oz est constant .

Le moment cinétique de la goutte par rapport à l'axe Oz est

$$L_{Oz} = m(r\vec{e}_r \wedge \vec{v})\cdot\vec{e}_z = m(r\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta))\cdot\vec{e}_z = mr^2\dot{\theta} \quad (3)$$

On a donc

$$mr^2\dot{\theta} = mr(0)^2\dot{\theta}^2(0) = mr_0v_0 \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = \frac{r_0v_0}{r^2} \quad (4)$$

4. L'énergie mécanique de la goutte est

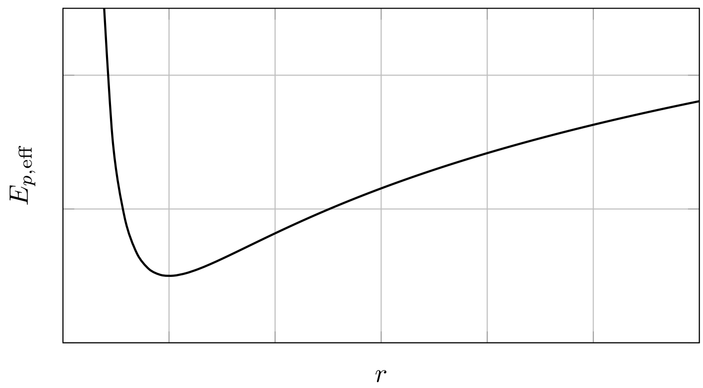
$$E_m = E_p + E_c = -\frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r) + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 \tag{5}$$

En utilisant l'expression de $\dot{\theta}$ trouvée à la question précédente, on trouve l'expression demandée de E_m :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} - \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r)}_{E_{p,\text{eff}}}} \tag{6}$$

on a alors $\boxed{\alpha = \frac{mv_0^2 r_0^2}{2}}$ et $\boxed{\beta = -\frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}}$

5. Vu les signes de q et λ, on a $\beta > 0$. Donc $\lim_{r\to 0} E_{p,\text{eff}}(r) = +\infty$ ($\frac{1}{r^2}$ diverge plus vite que $\ln(r)$) et $\lim_{r\to\infty} E_{p,\text{eff}}(r) = +\infty$. On peut dériver $E_{p,\text{eff}}(r)$ pour montrer qu'elle ne présente qu'un extremum qui est forcément un minimum. On obtient l'allure suivante pour $E_{p,\text{eff}}(r)$:



Vu les limites en $\pm\infty$ trouvée pour $E_{p,\text{eff}}(r)$ on conclut qu'il ne peut pas exister d'états de diffusion. Si l'énergie potentielle effective est minimale, le mouvement est circulaire, sinon c'est un état lié (pas elliptique car le champ de force n'est pas newtonien).

6. Pour déterminer la vitesse de la goutte en fonction du rayon r_0 du mouvement circulaire, on peut lui appliquer le PFD dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Le mouvement est circulaire uniforme (conservation du moment cinétique) donc l'accélération est uniquement normale $m\vec{a} = -m\frac{v_0^2}{r_0}\vec{e}_r$ et on obtient :

$$\boxed{-m\frac{v_0^2}{r_0}\vec{e}_r = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\vec{e}_r \quad \text{soit} \quad v_0 = \sqrt{-\frac{\lambda q}{2m\pi\varepsilon_0}}} \tag{7}$$

On peut également trouver la même réponse en écrivant que sur l'orbite circulaire, $\frac{\mathrm{d}E_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}r}(r_0) = 0$ et exprimer v_0 en fonction de r_0.

III – Prise en compte des frottements de l'air

7. Si la trajectoire est circulaire sur un tour, alors la conservation du moment cinétique par rapport à l'axe $\vec{e}_z$ impose que la vitesse est constante et son expression a déjà été déterminée à la question précédente

$$\boxed{v = \sqrt{-\frac{\lambda q}{2m\pi\varepsilon_0}}} \tag{8}$$

Comme v ne dépend pas de r, on en déduit que tant que la trajectoire reste circulaire, la vitesse ne peut pas varier et l'énergie cinétique de la goutte est constante au cours du temps.

8. La puissance de la force de frottement est
$$P = \vec{f} \cdot \vec{v} = -kv^2 \tag{9}$$
Le théorème de la puissance cinétique est $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = P$ car la force de frottement est la seule force non conservative. De plus, on a vu que la vitesse v de la goutte reste constante au cours du temps, donc son énergie cinétique également. On a donc
$$P = -kv^2 = \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E_p + E_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\dot{r} \quad \text{soit} \quad \dot{r} = \frac{2\pi\varepsilon_0 k v^2}{\lambda q} r = -\frac{k}{m} r \tag{10}$$
Et finalement
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{r}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{k}} \tag{11}$$

9. On résout l'équation différentielle précédente avec $r(0) = r_0$ et on trouve immédiatement
$$\boxed{r(t) = r_0 e^{-t/\tau}} \tag{12}$$
L'énoncé indique que la goutte s'écrase sur l'aiguille au bout de quelques dizaines de secondes. En considérant que l'aiguille n'a pas d'épaisseur, la goutte s'écrase sur l'aiguille lorsque $r(t_f) = R$, soit $r_0 e^{-t_f/\tau} = R$, ou encore
$$\boxed{\tau = \frac{t_f}{\ln(r_0/R)} \approx 20\,\mathrm{s}} \tag{13}$$
On a pris $t_f = 30\,\mathrm{s}$ (quelques dizaines de secondes), $r_0 = 1\,\mathrm{cm}$ et $R = 2\,\mathrm{mm}$.

10. L'énoncé indique que la pseudo-période de la goutte d'eau est de l'ordre de $T_0 \approx 3\,\mathrm{s}$. La variation relative au cours d'un tour au début de la trajectoire est
$$\boxed{\frac{\Delta r}{r_0} = \frac{r_0 - r_0 e^{-T_0/\tau}}{r_0} = 1 - e^{-T_0/\tau} \approx 14\,\%} \tag{14}$$
Ça n'est pas une diminution relative si petite que ça et l'approximation faite devra probablement être remise en cause si on veut faire une modélisation un peu plus précise de l'expérience.

11. On commence par estimer la force exercée par l'aiguille sur la goutte au début de la rotation. (On fait un calcul d'ordre de grandeur !)
    — La goutte a un rayon de l'ordre de $R = 2\,\mathrm{mm}$, donc sa masse est de l'ordre de $m = \rho_e V \approx \rho_e R^3 \approx 8\times10^{-6}\,\mathrm{kg}$
    — La goutte parcourt un cercle de rayon $r_0 = 1\,\mathrm{cm}$ en $T_0 = 3\,\mathrm{s}$. Sa vitesse est donc $v = \frac{2\pi r_0}{T_0} \approx 2\times10^{-2}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
    — En appliquant le PFD à la goutte comme à la question 6, on estime la force exercée par l'aiguille sur la goutte : $\boxed{F = m\frac{v^2}{r_0} \approx 3\times10^{-7}\,\mathrm{N}}$.

    Sur Terre la goutte subirait un poids $\boxed{P = mg \approx 8\times10^{-5}\,\mathrm{N}}$. Le poids est donc au moins 100 fois plus intense que la force électrique et cette expérience ne pourrait pas être reproduite sur Terre.