DS5 : Molécules, ondes et cinématique

- Durée : 4h.
- La calculatrice est autorisée.
- Chaque réponse doit être justifiée.
- Même lorsque ça n'est pas précisé, toute application numérique doit être précédée d'une expression littérale en fonction des données de l'énoncé.

Exercice 1 : Solubilité de différentes espèces

On indique ci-dessous les valeurs de la solubilité s de plusieurs gaz dans l'eau à 20 °C, exprimée en mol ℓ^{-1}, sous pression atmosphérique.

Gaz	H_2	CH_4	C_2H_6
s	$8{,}0 \times 10^{-4}$	$1{,}5 \times 10^{-3}$	$2{,}0 \times 10^{-3}$

1. Nommer et décrire succinctement les différentes interactions de Van der Waals. Donner un ordre de grandeur de l'énergie de liaison associée.
2. Définir une liaison hydrogène et donner un exemple d'espèce établissant une telle liaison. Donner un ordre de grandeur de l'énergie de liaison associée.
3. Interpréter l'évolution de solubilité constatée en lien avec les forces intermoléculaires.
4. On indique ci-dessous la solubilité s de deux gaz triatomiques dans l'eau, exprimée en mol ℓ^{-1}, sous pression atmosphérique.

Gaz	CO_2	SO_2
s	$3{,}8 \times 10^{-2}$	1,77

   (a) Déterminer les structures de Lewis les plus probables de ces deux molécules.
   (b) Le dioxyde de carbone est une molécule linéaire alors que le dioxyde de soufre est coudé (les deux liaisons forment un angle $\alpha = 119°$) . Expliquer qualitativement cette différence.
   (c) On donne la longueur de liaison et le pourcentage d'ionicité des liaisons CO et SO :

$$\ell_{\mathrm{CO}} = 116{,}3\,\mathrm{pm} \quad \text{et} \quad I_{\mathrm{CO}} = 18{,}0\,\%$$
$$\ell_{\mathrm{SO}} = 143{,}1\,\mathrm{pm} \quad \text{et} \quad I_{\mathrm{SO}} = 23{,}4\,\%$$

   Le pourcentage d'ionicité I_{AB} d'une liaison A−B est défini comme $I = \frac{\delta}{e}$ où δ est la valeur absolue de la charge partielle portée par les atomes liés et $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C est la charge d'une électron.
   Déterminer le moment dipolaire des deux molécules.
   (d) Interpréter la différence de solubilité observée.

5. L'urée est un composé organique de formule $(NH_2)_2CO$. L'urée est soluble dans l'eau à hauteur de 119 g d'urée pour 100 g d'eau à 25 °C.
   (a) Déterminer la formule de Lewis la plus probable de l'urée (l'atome de C est central).
   (b) Expliquer la bonne solubilité de l'urée dans l'eau.

Données :
On donne les numéros atomiques suivants : $Z(\mathrm{H}) = 1$, $Z(\mathrm{C}) = 6$, $Z(\mathrm{N}) = 7$, $Z(\mathrm{O}) = 8$ et $Z(\mathrm{S}) = 16$.

Exercice 2 : Cuve à ondes

On considère une cuve à ondes, constituée d'une nappe d'eau dont la surface au repos est dans le plan horizontal Oxy.

I – Lame vibrante

Une lame d'axe Oy, vibrant verticalement à la fréquence $f = 100\,\text{Hz}$, produit à la surface de cette nappe d'eau une onde plane progressive harmonique transversale, d'amplitude $a = 1{,}0\,\text{mm}$. L'onde se propage selon l'axe Ox à la célérité constante $c = 36\,\text{cm}\,\text{s}^{-1}$. Le milieu est supposé non dispersif et non absorbant. Les variations en fonction du temps t de la hauteur d'eau au point S d'abscisse $x_S = 0$ sont supposées sinusoïdales :

$$z(0,t) = a\cos(2\pi f t)$$

On étudie la propagation de l'onde plane selon Ox, où l'on repère la position en un point P quelconque de la surface de l'eau par son abscisse x. On pose $\vec{e}_x$ un vecteur unitaire de l'axe Ox.

1. Exprimer la longueur d'onde λ et la calculer numériquement.
2. Exprimer littéralement le nombre d'onde k à partir des données de l'énoncé.
3. Écrire, en la justifiant, l'expression de $z(x,t)$ du point P à l'abscisse x en fonction du temps t.
4. Représenter graphiquement, sur un même graphe, les mouvements de S, M et N, d'abscisses respectives $x_S = 0$, $x_M = \frac{3\lambda}{4}$ et $x_N = 5\lambda$ en fonction du temps, sur au moins 2 périodes.

II – Interférences

La lame vibrante est maintenant remplacée par deux pointes situées en S_1 et S_2, distantes de $a = S_1S_2$. Celles-ci frappent simultanément la nappe d'eau, à intervalles réguliers. Ces deux pointes génèrent des ondes qui interfèrent, comme le montre la Fig. (8) (gauche) ci-dessous où la cuve à ondes est vue de dessus, éclairée par un stroboscope. La figure est claire là où la surface de l'eau est convexe et foncée là où elle est concave. L'amplitude d'oscillation est plus faible là où la figure est moins contrastée.

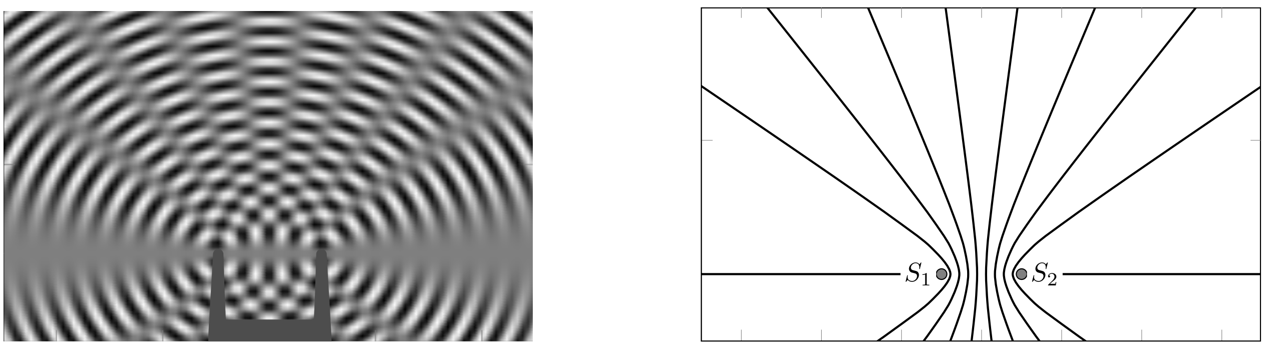


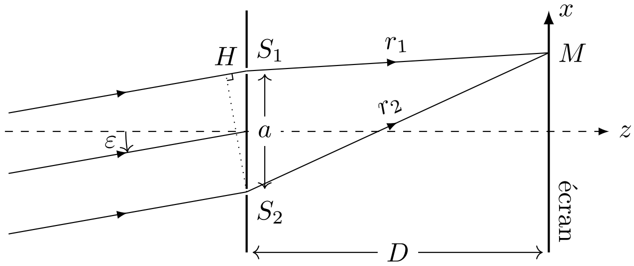
Figure 1 – Ondes circulaires de surface générées par deux sources ponctuelles synchrones (à gauche), et les lignes de vibration minimale qui leur sont associées (à droite).

On modélise ces ondes par des ondes sinusoïdales sphériques (ou circulaires) émises par des sources ponctuelles, situées aux points S_1 et S_2 où les pointes frappent la surface de l'eau.

5. En notant λ la longueur d'onde, donner la condition pour que l'interférence en un point M situé aux distances d_1 et d_2 respectivement de S_1 et de S_2, soit destructive.
6. Le lieu des points vérifiant cette condition est un ensemble de courbes que l'on appelle « ligne de vibration minimale ». Ce sont des hyperboles. Elles sont représentées sur la figure 1 (droite).
   (a) Les parties $x < -\frac{a}{2}$ et $x > \frac{a}{2}$ de l'axe Ox sont des lignes de vibration minimale. En déduire un renseignement sur a/λ.
   (b) Sur le segment $[S_1S_2]$, quel est l'intervalle de variation de $d_2 - d_1$? Déduire de la figure la valeur de a/λ.

Exercice 3 : Détection d'étoiles doubles par interférométrie

On utilise une lunette astronomique que l'on pointe vers un couple de deux étoiles très voisines E_1 et E_2, supposées ponctuelles et à l'infini. Elles émettent chacune une même lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 600\,\text{nm}$, et dont la célérité sera assimilée à celle du vide : $c = 3{,}0 \times 10^8\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. On dispose la lunette de sorte que E_1 et E_2 soient symétriques par rapport à son axe optique. En sortie de la lunette, les faisceaux de rayons parallèles issus de E_1 et E_2 forment des angles respectifs $+\varepsilon > 0$ et $-\varepsilon < 0$ avec l'axe optique. Les étoiles étant voisines, on a $\varepsilon \ll 1$.



Derrière l'oculaire de la lunette et dans un plan perpendiculaire à l'axe optique, on place une feuille opaque percée de deux trous d'Young S_1 et S_2 séparés d'une distance a. En raison de la diffraction, chaque trou se comporte comme une nouvelle source lumineuse ponctuelle. On regarde l'éclairement au niveau d'un point M d'un écran orthogonal à l'axe optique, placé à une distance $D \gg a$ de la feuille.

Pour commencer, on suppose que la feuille est éclairée uniquement par l'étoile E_1 (cas représenté sur le schéma). On admettra que les signaux lumineux aux points S_2 et H sont en phase, et que les amplitudes des deux ondes qui interfèrent en M sont égales.

1. Rappeler la relation reliant k, ω et c puis celle reliant λ, c et f. Calculer la valeur numérique de la fréquence des ondes lumineuses.

La formule de Fresnel donnant l'amplitude S résultant de la superposition de deux ondes d'amplitudes A_1 et A_2 déphasées de $\Delta\varphi$ est $S = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)}$

2. Donner, en fonction de A (amplitude commune des deux ondes qui interfèrent en M) et $\Delta\varphi$ (déphasage entre les deux ondes qui interfèrent en M) l'amplitude de l'onde au point M.

L'intensité lumineuse $I(M)$ est proportionnelle à la moyenne temporelle de $s^2(M,t)$, ce que l'on note $I(M) = 2\beta\langle s^2(M,t)\rangle$, où β est un coefficient constant.

3. Montrer que l'intensité observée au point M est de la forme $I(M) = 2I_0(1 + \cos(\Delta\varphi))$, où I_0 est l'intensité lumineuse reçue en M de la part d'un des deux trous. On précisera l'expression de I_0 en fonction de β et A.
4. Donner l'expression du déphasage $\Delta\varphi$ entre les deux ondes qui interfèrent en M en fonction de la différence de marche $\delta(M)$ et de la longueur d'onde λ. Puis expliciter $\delta(M)$ en fonction de r_1, r_2 et HS_1.
5. On donne les coordonnées $M(x,y,D)$, $S_1(A/2,0,0)$ et $S_2(-a/2,0,0)$. On suppose de plus que $D \gg x, y$. Établir les expressions simplifiées de r_1 et r_2 en fonction de x, y, D et a, à l'aide d'un développement limité. On rappelle que $(1+X)^\alpha \approx 1 + \alpha X$ lorsque $X \ll 1$.
6. On notera désormais l'intensité $I(M) = I_1(M)$ puisqu'elle est causée par l'étoile E_1. Montrer que finalement
$$I_1(x) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{x}{D} - \varepsilon\right)\right)\right) \tag{1}$$
7. Quelle est la position x_0 du maximum de $I_1(x)$ correspondant à un déphasage nul entre les deux ondes ?
8. Établir les positions x_+ et x_- des deux annulations de $I_1(x)$ de part et d'autre de x_0. En déduire l'expression de l'interfrange i en fonction de a, λ et D.
9. Tracer l'allure de $I_1(x)$ sur trois interfranges.

On considère désormais les rayons issus des deux étoiles simultanément. Bien qu'elles soient synchrones, les lumières issues des deux étoiles n'interfèrent pas entre elles car elles sont incohérentes, c'est-à-dire constituées chacune de trains d'ondes mutuellement décorrélés [1]. Par conséquent la figure d'interférence observée sur l'écran est formée par l'addition des intensités $I_1(M)$ et $I_2(M)$ issues respectivement des étoiles E_1 et E_2. On supposera enfin que l'intensité reçue de chaque étoile dans la lunette est la même.

10. En déduire l'expression de l'intensité $I_2(x)$ sur l'écran.
11. À l'aide d'une formule trigonométrique adaptée, exprimer l'intensité totale $I(x)$ sous la forme d'une somme d'un terme constant et d'un produit de deux fonctions sinusoïdales.
12. Déterminer la valeur maximale $I_{\max}$ et minimale $I_{\min}$ de l'intensité. En déduire l'expression du contraste $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$.

1. programme de deuxième année

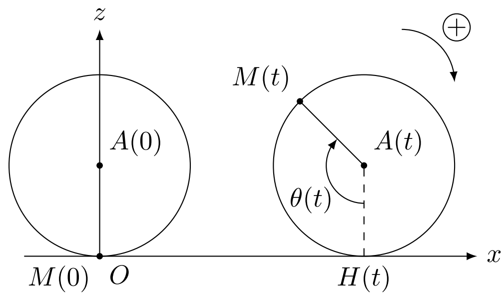
13. Montrer que le contraste s'annule pour certaines valeurs de a à expliciter (donc les franges d'interférences se brouillent, l'écran devient uniformément éclairé). Interpréter ce résultat à l'aide de la question 9.
14. La plus petite distance a entre S_1 et S_2 pour laquelle les franges disparaissent vaut $a_{\min} = 71\,\mathrm{mm}$. En déduire la distance angulaire 2ϵ (en radians) entre les deux composantes de l'étoile double. Pourrait-on l'observer à l'œil nu à travers la lunette ?

Exercice 4 : La cycloïde

La cycloïde est la courbe engendrée par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite. On peut expérimentalement observer cette courbe en observant la trajectoire de la valve d'une roue de vélo.

I. Equations paramétriques cartésiennes du mouvement.

On note M un point donné d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon R roulant sans glissement sur une surface plane. A l'instant initial ($t = 0\,\mathrm{s}$) on suppose que le point M est confondu avec l'origine O d'un repère (Oxz). On note $H(t)$ le projeté orthogonal de A sur l'axe (Ox) **qui dépend du temps car la roue avance**. La position de M à l'instant t est repérée par l'angle orienté $\theta(t) = (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AM})$, le sens positif étant le sens horaire.



On souhaite déterminer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point M en fonction du paramètre θ. Le mouvement du point M est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au repère (Oxz).

1. Démontrer que la distance algébrique $\overline{OH}$ est donnée par la relation $\overline{OH} = R\theta(t)$.
2. Exprimer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AM}(t)$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$, dirigeant les axes Ox et Oz, en fonction de R et de $\theta(t)$.
3. En décomposant judicieusement le vecteur $\overrightarrow{OM}$, montrer que les équations horaires du mouvement s'écrivent sous la forme
$$\begin{cases} x(t) &= R[\theta(t) - \sin\theta(t)] \\ z(t) &= R[1 - \cos\theta(t)] \end{cases}$$

II. Vecteur vitesse.

Afin de simplifier l'étude cinématique, on se limite dans toute la suite au cas où le centre A du cercle $\mathcal{C}$ a un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v_0.

4. En utilisant la relation établie à la question 1, montrer que la vitesse angulaire de rotation $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ est constante. Donner son expression en fonction de R et de v_0.
5. Montrer que le mouvement de M dans le référentiel (Axz), de centre A et d'axes Ax et Az parallèles à Ox et Oz, est circulaire uniforme.
6. Exprimer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$ en fonction de R, θ et $\dot{\theta}$.
7. Représenter sur un même schéma la position du cercle $\mathcal{C}$ et la trajectoire de M au cours du temps (la fameuse cycloïde), en dessinant l'allure du vecteur vitesse $\vec{v}$ pour les valeurs suivantes du paramètre θ : $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \pi$, $\theta_3 = \frac{3\pi}{2}$, et $\theta_4 = 2\pi$
8. Déterminer la norme $v = \|\vec{v}(M/\mathcal{R})\|$ de la vitesse de M dans $\mathcal{R}$ en fonction de v_0 et de θ.
9. Simplifier l'expression précédente de v grâce à une formule de trigonométrie. Représenter graphiquement $v(t)$, sur deux périodes T, en faisant apparaître v_0 sur le graphique.

III. Vecteur accélération.

10. Exprimer dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ les composantes du vecteur accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ du point M dans $\mathcal{R}$ en fonction de v_0, R et θ.
11. Sur le dessin de la question 7, représenter l'allure du vecteur accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ pour les valeurs θ_1, θ_2, θ_3 et θ_4.
12. On dit que le point M est accéléré lorsque la norme de sa vitesse augmente. Dans quelles zones le point M est-il accéléré ou décéléré ?
13. En quoi les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ pour $\theta_4 = 2\pi$ présentent-ils un caractère surprenant ?
14. Montrer que la norme $a = \|\vec{a}(M/\mathcal{R})\|$ du vecteur accélération de M dans $\mathcal{R}$ est constante. Calculer sa valeur pour un pneu de voiture de rayon $R = 35\,\mathrm{cm}$ et tel que $v_0 = 130\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.
15. Montrer que $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ est toujours dirigé de M vers A.