DS3 : Régimes transitoires, chimie – corrigé

Exercice 1 : Détermination en ion salicylate d'une crème contre l'acné

1. L'équation de réaction (1) de constante K° correspond à la somme des deux équations de constantes K_1° et K_2°. On a donc $\boxed{K^\circ = K_1^\circ \times K_2^\circ}$.
2. On fait l'application numérique, et on trouve directement $\boxed{K_2^\circ = K^\circ / K_1^\circ = 10^{-13,6}}$
3. Les concentrations apportées sont les suivantes :

Soluté	Sal^-	Na^+	Fe^{3+}	${NO_3}^-$
C ($\mathrm{mol}\,\ell^{-1}$)	$\frac{C_1V_1}{V_1+V_2} = 9{,}90 \times 10^{-5}$	$\frac{C_1V_1}{V_1+V_2} = 9{,}90 \times 10^{-5}$	$\frac{C_2V_2}{V_1+V_2} = 9{,}90 \times 10^{-3}$	$\frac{3C_2V_2}{V_1+V_2} = 2{,}97 \times 10^{-2}$

4. On a le tableau d'avancement suivant :

	Sal^-	+	Fe^{3+}	=	$Comp^+$	+	H^+
État initial	$\frac{C_1V_1}{V_1+V_2}$		$\frac{C_2V_2}{V_1+V_2}$		0		–
État final	$\frac{C_1V_1}{V_1+V_2} - x$		$\frac{C_2V_2}{V_1+V_2} - x$		x		–

5. On suppose que l'état final est un état d'équilibre (c'est très probablement le cas, car toutes les espèces sont aqueuses) et on écrit

$$\boxed{K^\circ = \frac{a(\mathrm{Comp}^+)a(\mathrm{H}^+)}{a(\mathrm{Sal}^-)a(\mathrm{Fe}^{3+})} = \frac{\frac{x}{c^\circ}\frac{[\mathrm{H}^+]}{c^\circ}}{\left(\frac{C_1V_1}{c^\circ(V_1+V_2)} - \frac{x}{c^\circ}\right)\left(\frac{C_2V_2}{c^\circ(V_1+V_2)} - \frac{x}{c^\circ}\right)} = \frac{x[\mathrm{H}^+]}{\left(\frac{C_1V_1}{(V_1+V_2)} - x\right)\left(\frac{C_2V_2}{(V_1+V_2)} - x\right)}}$$

6. On remarque que la constante d'équilibre est relativement grande ($K^\circ = 10^{2,9}$, donc il n'est pas absurde de supposer que la réaction est très avancée. De plus, la concentration initiale en Sal^- est beaucoup plus faible que la concentration initiale en Fe^{3+} ce qui indique que
   — Sal^- est le réactif limitant, sa concentration finale sera donc négligeable par rapport à sa concentration initiale.
   — La quantité de Fe^{3+} consommée à l'état final sera très faible par rapport à la quantité de Fe^{3+} initiale, donc la concentration en Fe^{3+} restera quasiment constante au cours de la réaction.
7. Dans l'équation précédente, on fait les approximations et changements de variables suivants :
   — $\frac{C_1V_1}{(V_1+V_2)} - x = \varepsilon$;
   — $\frac{C_2V_2}{(V_1+V_2)} - x \approx \frac{C_2V_2}{(V_1+V_2)}$;
   — $x \approx \frac{C_1V_1}{(V_1+V_2)}$.

   On obtient alors l'équation :

$$K^\circ = \frac{\frac{C_1V_1}{(V_1+V_2)}[\mathrm{H}^+]}{\varepsilon\frac{C_2V_2}{(V_1+V_2)}} = \frac{C_1V_1[\mathrm{H}^+]}{\varepsilon C_2V_2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\varepsilon = \frac{C_1V_1[\mathrm{H}^+]}{K^\circ C_2V_2} \approx 1{,}3 \times 10^{-8}\,\mathrm{mol}\,\ell^{-1}}$$

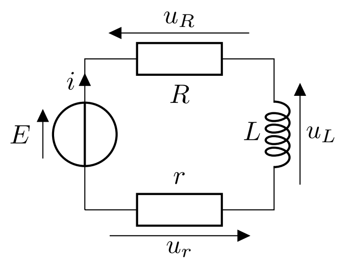
   On remarque que $\varepsilon \ll \frac{C_1V_1}{V_1+V_2}$, ce qui valide l'hypothèse selon laquelle la réaction est très avancée.
8. Étant donnée l'absorbance de la solution obtenue, on peut en déduire la concentration initiale en ions salicylate par interpolation linéaire de la courbe donnée. On trouve graphiquement $C_1 \approx 66\,\mathrm{mmol}\,\ell^{-1}$. Le pourcentage massique en ions salicylate est

$$\boxed{\eta = \frac{M(\mathrm{Sal}^-)C_1}{\rho_{\text{crème}}} \approx 1{,}05\,\%}$$

   La valeur trouvée semble donc en accord avec les données de l'étiquette. Pour en être sûr, il faudrait évaluer les incertitudes de mesures afin de déterminer si l'écart trouvé entre les deux valeurs est significatif.

Exercice 2 : RUPTURE DE COURANT DANS UN CIRCUIT INDUCTIF

I – Établissement du courant dans une bobine



1. On applique la loi des mailles.

$$E = u_R(t) + u_L(t) + u_r(t) = (R+r)i(t) + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}(t)$$

Soit, sous forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{R+r}{L}i(t) = \frac{E}{L} \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{L}{R+r}}$$

2. La solution de l'équation différentielle est de la forme

$$i(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{E}{R+r}$$

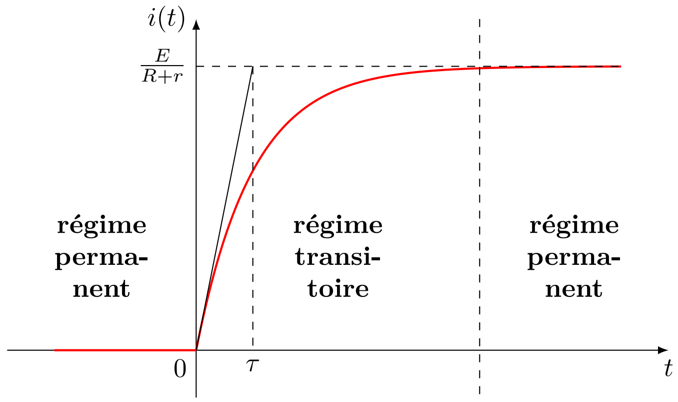
On détermine la constante A à l'aide des conditions initiales. La continuité du courant traversant la bobine conduit à $i(t=0^+) = 0$. Ainsi

$$A + \frac{E}{R+r} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = -\frac{E}{R+r}$$

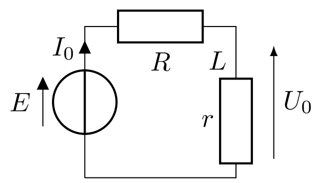
Soit

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R+r}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

3. Représentation graphique.



4. Le régime transitoire se termine pour $t \to +\infty$. L'expression du courant devient : $\boxed{i(t\to+\infty) = I_0 = \frac{E}{R+r}}$
De plus, en régime permanent, la bobine se comporte comme un fil.
On applique le pont diviseur de tension.



$$\boxed{U_0 = \frac{r}{R+r}E}$$

5. Par définition, l'énergie stockée dans une bobine est : $\boxed{E_{\text{mag}} = \frac{1}{2}L{I_0}^2 = \frac{LE^2}{2(R+r)^2}}$.

6. Par définition, la puissance dissipée par effet Joule est $\boxed{P_J = r{I_0}^2 = \frac{rE^2}{(R+r)^2}}$.

II – Protection des composants lors de la rupture du courant

7. La relation courant/tension de la bobine est $u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)$. Lors de l'ouverture de l'interrupteur, le courant passe **brutalement** de I_0 à 0. La grande variation de courant conduit à une grande tension.

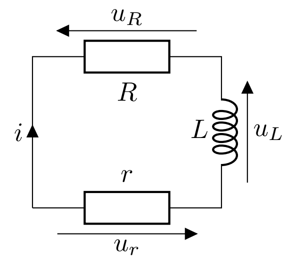
8. À l'ouverture de l'interrupteur, plus aucun courant ne circule dans le circuit et la bobine ne peut pas se décharger à travers les résistances R et r. La tension élevée dans la bobine doit se retrouver ailleurs dans le circuit par la loi des mailles. La tension aux bornes des résistances tend vers zéro car le courant tend vers zéro. C'est donc **aux bornes de l'interrupteur** que cette tension se retrouve. La tension entre les deux connecteurs de l'interrupteur est suffisamment importante pour provoquer un arc électrique, qui prend ici la forme d'une étincelle.

9. On applique la loi des mailles dans la maille de gauche : $E = -u_D > 0$ soit $u_D < 0$.

   D'après la caractéristique courant/tension de la diode, le courant i_D est nul pour une tension à ses bornes négatives. La diode se comporte alors comme un **interrupteur ouvert** et on retrouve la situation de la partie précédente.

10. Une fois l'interrupteur K ouvert, on a $i = i_D > 0$. D'après la caractéristique courant/tension de la diode, **la tension à ses bornes est nulle** pour un courant positif. La diode se comporte alors comme un fil. Dans ce cas, l'intensité peut continuer à circuler dans la bobine après ouverture de l'interrupteur, et la diminution du courant est alors plus progressive. **On évite la surtension aux bornes de la bobine**, donc l'éventuel endommagement des autres composants du circuit.

11. Pour $t \geq 0$, le circuit se ramène à la situation ci-dessous. On applique la loi des mailles.



$$0 = u_R(t) + u_L(t) + u_r(t) = (R+r)i(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)$$

   Soit, sous forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{R+r}{L}i(t) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{L}{R+r}}$$

12. La solution de l'équation différentielle est de la forme $i(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. On détermine la constante A à l'aide des conditions initiales. La continuité du courant traversant la bobine conduit à $i(t=0^+) = I_0$ soit $A = I_0$. Ainsi $\boxed{i(t) = I_0\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$

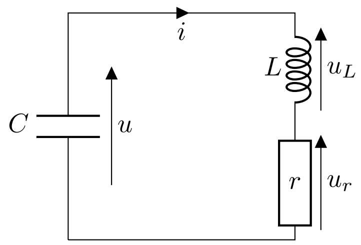
13. La tension aux bornes de la bobine réelle est $u_L(t) + u_r(t)$. D'après la loi des mailles, on obtient $u_L(t) + u_r(t) = -u_R(t) = -Ri(t)$ soit $\boxed{u_L(t) + u_r(t) = -RI_0\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$

    En valeur absolue, la valeur maximale de cette tension est atteinte à l'instant $t = 0$. $\boxed{|u_L(t=0) + u_r(t=0)| = RI_0}$

    Cette tension est du même ordre de grandeur que les tensions dans le circuit avant fermeture de l'interrupteur. Il n'y a donc pas de surtension et donc pas de risque de destruction des composants.

III – Rupture du courant en l'absence de protection

14. Lors de l'ouverture de l'interrupteur, le courant traversant la résistance R devient nul.



15. On applique la loi des mailles en remarquant que le condensateur est en convention générateur.

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}(t) + ri(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad u(t) = -LC\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}(t) - rC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$$

    Soit, sous forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{r}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{LC}u(t) = 0} \tag{1}$$

    Par identification, on trouve $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}}$

16. Pour déterminer la nature du régime transitoire, on calcule la valeur de Q. $Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}} = 1{,}6 \times 10^3 > \frac{1}{2}$. Le régime est **pseudo-périodique**. La tension $u(t)$ est donc de la forme

$$\boxed{u(t) = \Big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}} \tag{2}$$

avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ (on trouve les solutions de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle pour déterminer ces expressions).

17. On détermine les constantes A et B à l'aide des conditions initiales. La continuité de la tension aux bornes du condensateur conduit à $u(t = 0^+) = U_0$ et la continuité du courant traversant la bobine conduit à $i(t = 0^+) = I_0$ soit, en convention générateur, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = -\frac{I_0}{C}$. Ainsi $\boxed{U_0 = u(t = 0^+) = A}$ et

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{1}{\tau}\Big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + \Big(-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\omega t)\Big)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

Soit

$$-\frac{I_0}{C} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = -\frac{U_0}{\tau} + B\Omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{B = \frac{U_0}{\Omega\tau} - \frac{I_0}{C\Omega}}$$

Or, d'après l'application numérique de la question précédente, $Q \gg 1$. Ainsi $\Omega \simeq \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. L'expression de B se simplifie

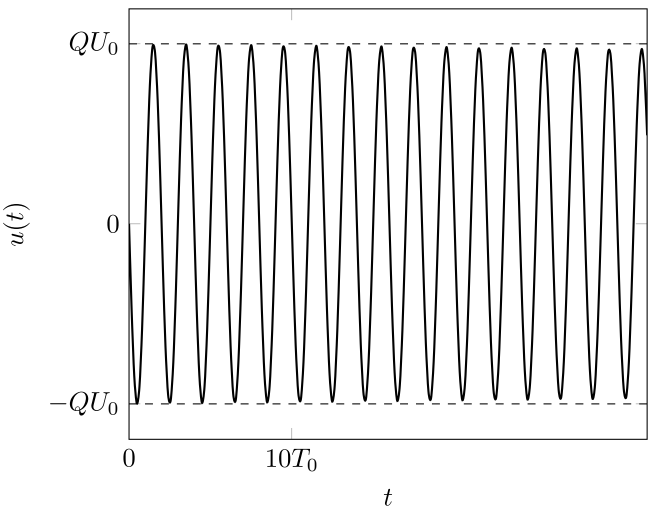
$$B = \frac{U_0}{2Q} - I_0\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{U_0}{2Q} - rI_0Q = U_0\left(\frac{1}{2Q} - Q\right)$$

Soit $\boxed{B \simeq -U_0Q}$ car $\frac{1}{2Q} \ll Q$

18. Avec $A = U_0$, $B = -U_0Q$ et $\Omega \simeq \omega_0$, l'expression de $u(t)$ devient

$$\boxed{u(t) \approx U_0\Big(\cos(\omega_0 t) - Q\sin(\omega_0 t)\Big)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \approx -QU_0\sin(\omega_0 t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}} \tag{3}$$

19. Représentation graphique.

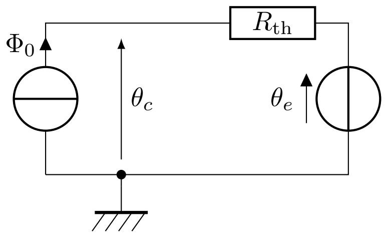


Le facteur de qualité est tellement grand que la décroissance exponentielle est quasiment invisible à cette échelle.

Exercice 3 : COMPORTEMENT THERMIQUE D'UN HABITAT

I – Modélisation à puissance thermique constante

1. En régime permanent, le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert donc il n'intervient pas.
2. En régime permanent, le circuit devient :



La loi des mailles conduit à $\theta(t \to +\infty) = \theta_c = R_{\text{th}}\Phi_0 + \theta_e$ soit $\boxed{\Phi_0 = \dfrac{\theta_c - \theta_e}{R_{\text{th}}} = 6{,}0 \times 10^3\,\text{W}}$

3. On note Φ_R et Φ_C respectivement les puissances thermiques à travers la résistance et le condensateur. Par analogie avec la loi des nœuds, nous obtenons $\Phi_R = \Phi_0 - \Phi_C$. Il reste à appliquer la loi des mailles.

$$\theta(t) = R_{\text{th}}\left(\Phi_0 - \Phi_C\right) + \theta_e \qquad \Longleftrightarrow \qquad \theta(t) = R_{\text{th}}\Phi_0 - R_{\text{th}}C_{th}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t) + \theta_e$$

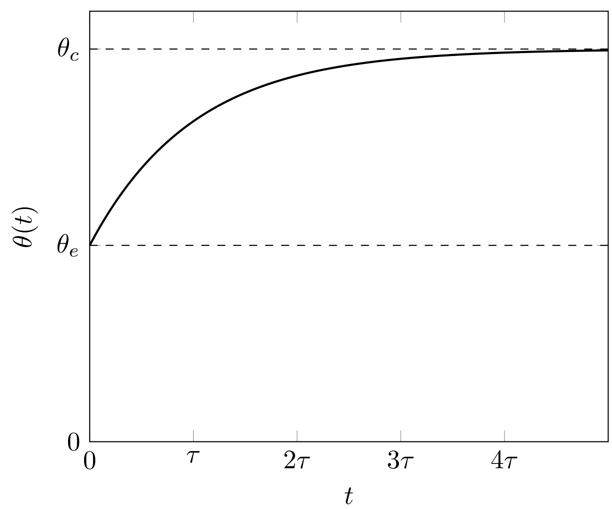
Soit, sous forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{R_{\text{th}}C_{\text{th}}}\theta(t) = \frac{\theta_e}{R_{\text{th}}C_{\text{th}}} + \frac{\Phi_0}{C_{\text{th}}}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\tau_0 = R_{\text{th}}C_{\text{th}}}$$

4. La solution est de la forme : $\theta(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right) + \theta_e + R_{\text{th}}\Phi_0$.
   La constante A se détermine à l'aide des conditions initiales : $\theta(t=0) = \theta_e = A + \theta_e + R_{\text{th}}\Phi_0$ donc $\boxed{A = -R_{\text{th}}\Phi_0}$.
   Finalement

$$\boxed{\theta(t) = R_{\text{th}}\Phi_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right)\right) + \theta_e} \tag{1}$$

5. Allure de $\theta(t)$:



6. La température θ_c correspond à la température en régime permanent. Ainsi $\boxed{t_1 = 5\tau_0 = 3{,}8 \times 10^4\,\text{s} \sim 10\,\text{h}}$. La valeur obtenue est très élevée pour le système de chauffage d'un batiment.