DS2 : Optique, circuits électriques

Exercice 1 : Caméra de contrôle de plaques d'immatriculation

I – Dimensionnement des caméras

1. Pour pouvoir former une image réelle d'un objet réel par une lentille convergente il faut que la distance objet-image PC soit telle que $\boxed{PC \geq 4f'}$.
2. On utilise la formule de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OC}} - \frac{1}{\overline{OP}} = \frac{1}{f'} \quad \text{soit} \quad \overline{OC} = \frac{f'\overline{OP}}{f' + \overline{OP}} \quad \text{avec} \quad \overline{OP} = -L, \text{on a} \quad \boxed{\overline{OC} = \frac{f'L}{L - f'}} \tag{1}$$

Comme on veut $\overline{OC} > 0$, il faut nécessairement que $\boxed{f' > 0}$ donc la lentille doit être convergente.

3. Le grandissement est donné par $\gamma = \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OC}}{-L}$. Donc on trouve finalement $\boxed{\gamma = \frac{f'}{f'-L}}$.
4. On remarque que pour toutes les caméras, on a $f' \ll L$, on peut donc simplifier l'expression de $\overline{OC}$: $\boxed{\overline{OC} \approx \frac{f'L}{L} \approx f'}$. Ce résultat est attendu car si la distance lentille-objet est grande par rapport à la distance focale, l'objet peut être considéré comme étant à l'infini et son image est $\boxed{\text{dans le plan focal image de la lentille.}}$
5. Dans ces conditions, on obtient $\boxed{\gamma \approx -\frac{f'}{L}}$. Numériquement, on trouve :

Modèle de caméra	1	2	3	4	5
Grandissement	$-1{,}75 \times 10^{-3}$	$-1{,}72 \times 10^{-3}$	$-1{,}78 \times 10^{-3}$	$-1{,}71 \times 10^{-3}$	$-1{,}78 \times 10^{-3}$

On remarque que le grandissement est quasiment le même pour toutes les caméras, ce qui est assez raisonnable car de cette façon, toutes les cameras formeront des tailles identiques des plaques d'immatriculation sur leur capteur.

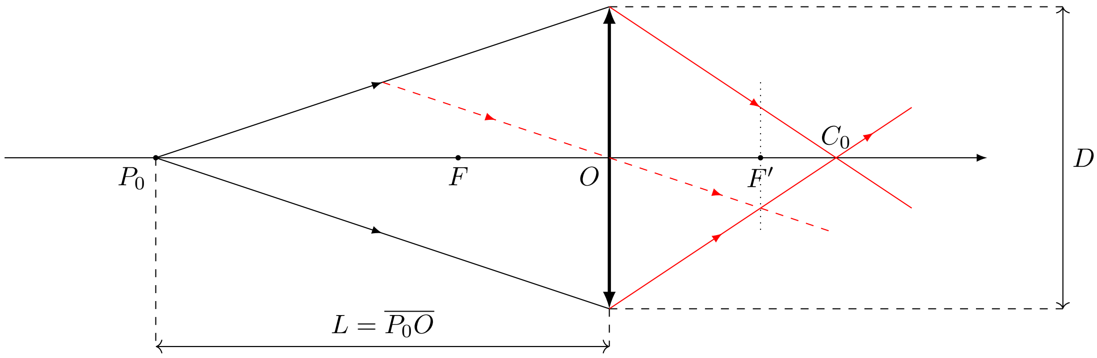
6. On commence par calculer la taille de la diagonale en fonction du côté a d'un pixels : $e = \sqrt{(752a)^2 + (582a)^2}$, on a donc finalement

$$\boxed{a = \frac{e}{\sqrt{752^2 + 582^2}} \approx 6{,}68\,\mu\text{m} \quad h = 582 \times a = 3{,}89\,\text{mm} \quad \text{et} \quad l = 752 \times a = 5{,}02\,\text{mm}} \tag{2}$$

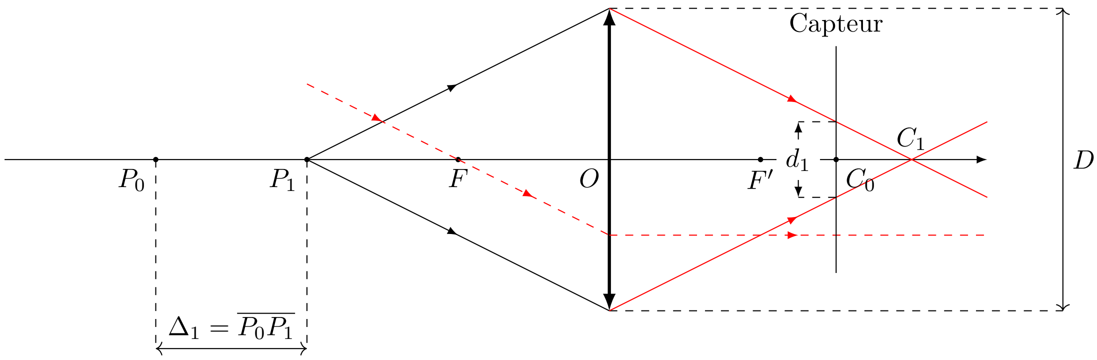
7. Pour obtenir le champ de vue, il faut diviser les valeurs précédentes par le grandissement $\boxed{L_v = -l/\gamma \approx 2{,}87\,\text{m}}$ et $\boxed{H_v = -h/\gamma \approx 2{,}22\,\text{m}}$. La largeur est du même ordre de grandeur que celle d'une voiture. Si la rue permettant d'accéder au centre-ville ne comporte qu'une seule voie, une seule caméra devrait être suffisante, mais pour plus d'une voie, il faut plus de caméras.
8. Il suffit de multiplier les dimensions $l_c \times h_c$ des caractères par le grandissement γ de la caméra, on trouve que chaque caractère doit mesurer $\boxed{l_c \times h_c = 87{,}5\,\mu\text{m} \times 138\,\mu\text{m}}$ soit $\boxed{l_c \times h_c = 13{,}1\,\text{pixels} \times 20{,}7\,\text{pixels}}$
9. Si le dispositif ne filmait que dans le domaine visible, les plaques d'immatriculation pourraient ne pas être bien visibles de nuit. Il faudrait alors les éclairer avec de la lumière visible, ce qui pourrait gêner les conducteurs. La caméra infrarouge permet d'éclairer les plaques la nuit en lumière infrarouge, invisible pour les conducteurs.

II – Profondeur de champ

10. On cherche l'image du point P_0 par la lentille. On sait que l'image se trouve sur l'axe optique, il faut donc tracer la marche d'un seul rayon provenant de P_0 et sortant de la lentille. On trace un rayon parallèle au rayon du bas, passant par le centre optique de la lentille, qui n'est pas dévié. Les deux rayons parallèles doivent, en sortant de la lentille, se croiser dans son plan focal image. On obtient la construction suivante :



11. On pourrait procéder exactement de la même manière avec le point P_1, mais, pour changer, on va utiliser un rayon parallèle à celui du bas passant par F, et sortant parallèle à l'axe optique. Les deux rayons parallèles se croisent, en sortie de la lentille, dans son plan focal objet.



12. Voir figure ci-dessus. On utilise le théorème de Thalès pour montrer que $\frac{d_1}{D} = \frac{\overline{C_1C_0}}{\overline{C_1O}}$ donc

$$d = D\frac{\overline{C_1C_0}}{\overline{C_1O}} = D\frac{\overline{C_1O}+\overline{OC_0}}{\overline{C_1O}} = D\left(1-\frac{\overline{OC_0}}{\overline{OC_1}}\right) \tag{3}$$

On peut calculer $\overline{OC_0}$ et $\overline{OC_1}$ avec la formule de conjugaison de Descartes. On a

$$\frac{1}{\overline{OC_0}} - \frac{1}{\overline{OP_0}} = \frac{1}{f'} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\overline{OC_0}} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{L} \quad \text{et donc} \quad \overline{OC_0} = \frac{Lf'}{L-f'} \tag{4}$$

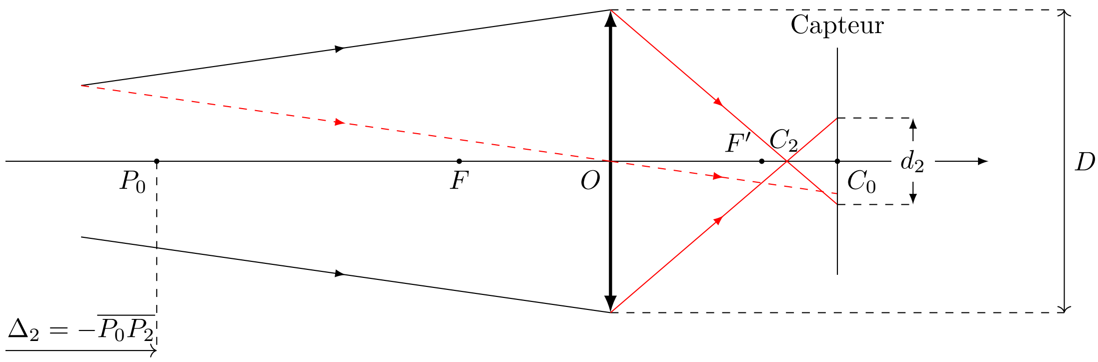
et

$$\frac{1}{\overline{OC_1}} - \frac{1}{\overline{OP_1}} = \frac{1}{f'} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\overline{OC_1}} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{OP_0}+\overline{P_0P_1}} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{-L+\Delta_1} \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{\overline{OC_1}} = \frac{\Delta_1 - L + f'}{f'\,(\Delta_1 - L)} \tag{5}$$

On obtient donc :

$$\boxed{d_1 = D\left(1-\frac{Lf'}{L-f'}\frac{\Delta_1 - L + f'}{f'(\Delta_1 - L)}\right) = D\frac{f'\Delta_1}{(L-f')(L-\Delta_1)}} \tag{6}$$

13. On procède de la même manière que précédemment et on obtient la figure suivante :



14. Comme $f' \ll L$, on a
$$\boxed{d_1 \approx D\frac{f'\Delta_1}{L(L-\Delta_1)} \quad \text{et} \quad d_2 \approx D\frac{f'\Delta_2}{L(L+\Delta_2)}} \tag{7}$$
15. La taille de la tache a un diamètre inférieur à la taille d'un pixel si $d_1 < a$, soit en inversant l'équation obtenue : $\Delta_1 < \frac{aL^2}{Df'+aL}$, donc $\Delta_{1,\mathrm{lim}} = \frac{aL^2}{Df'+aL}$. De la même manière, on trouve $\Delta_{2,\mathrm{lim}} = \frac{aL^2}{Df'-aL}$
16. Aves les valeurs numériques données, on trouve $\Delta_{1,lim} = 2{,}54\,\mathrm{m}$ et $\Delta_{2,lim} = 5{,}85\,\mathrm{m}$
17. La profondeur de champ est donnée par $Z = aL^2\left(\frac{1}{Df'+aL} + \frac{1}{Df'-aL}\right) \approx 8{,}39\,\mathrm{m}$

Exercice 2 : Étude d'une photorésistance

I – Étude d'un dipôle résistif

1. R' est en série avec R et R, puis la résistance équivalente est en série avec R. On obtient une résistance équivalente $R_{\mathrm{eq}} = \frac{(R'+2R)R}{R'+3R}$.
2. On veut que
$$\frac{(R'+2R)R}{R'+3R} = R' \quad \text{soit} \quad R'^2 + 2RR' - 2R^2 = 0 \tag{1}$$
Le discriminant est $\Delta = 4R^2 + 8R^2 = 12R^2 > 0$. L'équation possède donc deux solutions $R'_1 = \frac{1}{2}(-2R + \sqrt{12}R)$ et $R'_2 = \frac{1}{2}(-2R - \sqrt{12}R)$. Comme une résistance ne peut pas être négative, on ne conserve que $R'_1 = (\sqrt{3}-1)R$.
3. On veut que $R' = (\sqrt{3}-1)R = 7{,}32\,\mathrm{k\Omega}$. Ce qui correspond (d'après le graphique de la figure 1 à une intensité lumineuse d'environ 14 lux. Dans ces conditions, la caractéristique courant-tension du dipôle est une droite passant par l'origine de pente $a = R'$. C'est un dipôle passif linéaire.

II – Étude d'un réseau linéaire

4. On forme une résistance équivalente avec les trois résistances de droite R, R' et R, $R_{\mathrm{eq},1} = R' + 2R$. On a alors un pont diviseur de courant formé par R et $R_{\mathrm{eq},1}$. Et on a directement :
$$\boxed{I_1 = I\frac{R}{R+R_{\mathrm{eq},1}} = I\frac{R}{R'+3R}} \tag{2}$$
5. On peut réorganiser les résistances de droite et former une résistance équivalente de valeur $2R$ avec les deux résistances R. On obtient un pont diviseur de tension qui donne directement la tension U' :
$$\boxed{U' = U\frac{R'}{R'+2R}} \tag{3}$$
6. On commence par déterminer l'expression de I en formant une résistance équivalente R_2 au dipôle branché aux bornes du générateur. On remarque que le dipôle de la question 1 est placé en série avec les deux résistances R de gauche. On obtient donc directement
$$R_2 = R_{\mathrm{eq}} + 2R = \frac{(R'+2R)R}{R'+3R} + 2R = \frac{R(3R'+8R)}{R'+3R} \tag{4}$$
On obtient l'expression de I en utilisant la loi d'Ohm aux bornes de R_2 : $I = E/R_2$.
Enfin, on exprime I_1 grâce au résultat de la question 4, on a :
$$\boxed{I_1 = \frac{E}{R_2}\frac{R}{R'+3R} = \frac{E}{3R'+8R}} \tag{5}$$

7. La puissance reçue par la photorésistance est $\boxed{P = R'I_1^2 = \frac{E^2 R'}{(3R'+8R)^2}}$.
8. On calcule la dérivée de $P(R')$ par rapport à R', on a

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R'} = \frac{E^2\,(3R'+8R)^2 - E^2 R' \times 2\,(3R'+8R) \times 3}{(3R'+8R)^4} = E^2(3R'+8R)\frac{(3R'+8R)-6R'}{(3R'+8R)^4} \tag{6}$$

Puis on cherche la valeur R'_m de R' pour laquelle la dérivée s'annule :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R'} = 0 \Leftrightarrow 8R - 3R' = 0 \Leftrightarrow \boxed{R'_m = \frac{8}{3}R} \tag{7}$$

Comme $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R'}(R' < R'_m) > 0$ et $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R'}(R' > R'_m) < 0$ on en conclut que l'extremum correspond à un maximum.

9. La puissance maximale P_m dissipé par la photorésistance l'est lorsque $R' = R'_m$. On calcule $P_m = P(R'_m) = \frac{E^2}{96R}$. Pour être sûr que la photorésistance ne sera pas détruite, il faut que $P_m < P_{\max}$, donc on doit avoir

$$\boxed{\frac{E^2}{96R} < P_{\max} \quad \text{soit} \quad R > \frac{E^2}{96P_{\max}} = 15\,\Omega} \tag{8}$$

Exercice 3 : Dissociation de l'iodure d'hydrogène

1. La pression initiale est la pression de HI(g) donée par l'équation des gaz parfaits : $\boxed{P_i = \frac{n_0RT}{V} \approx 24{,}9\,\text{bar}}$.
2. On établit le tableau d'avancement suivant :

	$2\,\mathrm{HI(g)}$	$\rightleftharpoons$	$\mathrm{H_2(g)}$	+	$\mathrm{I_2(g)}$
État initial	n_0		0		0
État final	$n_0 - 2\xi$		ξ		ξ

On remarque que la quantité totale de gaz est $n_{\text{gaz}} = n_0$ et reste constante au cours du temps. Donc la pression totale à l'équilibre est égale à la pression initiale $\boxed{P_{\text{tot}} = P_i}$.

3. La constante d'équilibre est

$$K_1^\circ = \frac{p(\mathrm{H_2})p(\mathrm{I_2})}{p(\mathrm{HI})^2} \tag{1}$$

Or, on a $p(\mathrm{I_2}) = p(\mathrm{H_2})$ car les quantités de matière des deux gaz sont égales. On peut aussi exprimer $p(\mathrm{HI})$ en fonction de P_{tot} et $P(\mathrm{H_2})$:

$$p(\mathrm{HI}) = \frac{n(\mathrm{HI})RT}{V} = \frac{(n_0-2\xi)RT}{V} = \frac{n_0RT}{V} - 2\frac{\xi RT}{V} = P_{\text{tot}} - 2p(\mathrm{H_2}) \tag{2}$$

Donc finalement la constante d'équilibre s'exprime comme

$$\boxed{K_1^\circ = \frac{p(\mathrm{H_2})^2}{(P_{\text{tot}} - 2p(\mathrm{H_2}))^2} = 2{,}74 \times 10^{-2}} \tag{3}$$

4. On exprimer le coefficient de dissociation :

$$\boxed{\alpha = \frac{2\xi}{n_0} = \frac{2\frac{p(\mathrm{H_2})V}{RT}}{\frac{P_iV}{RT}} = \frac{2p(\mathrm{H_2})}{P_i} = 24{,}9\,\%} \tag{4}$$