DS1 : Analyse dimensionnelle, optique – corrigé

Exercice 1 : Interaction gravitationnelle

1. On utilise la relation fournie pour déterminer la dimension de $\mathcal{G}$. On a l'équation aux dimensions :

$$\dim(F) = \dim(G) \times \dim(m_1)\dim(m_2) \times \dim(d)^{-2} \tag{1}$$

D'autre part, on peut explimer $\dim(F)$ grace au principe fondamental de la dynamique (par exemple) : $\dim(F) = \mathrm{MLT}^{-2}$. On a donc

$$\boxed{\dim(G) = \mathrm{MLT}^{-2}\mathrm{M}^{-2}\mathrm{L}^2 = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}} \tag{2}$$

2. On peut déterminer les dimensions des deux membres de l'équation. On a d'une part

$$\dim\left(\frac{T^2}{a^3}\right) = \mathrm{T}^2\mathrm{L}^{-3} \tag{3}$$

et d'autre part

$$\dim\left(\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}\mathcal{M}_{\mathcal{S}}}\right) = \mathrm{ML}^{-3}\mathrm{T}^2\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{T}^2\mathrm{L}^{-3} \tag{4}$$

Comme les deux membres ont la même dimension, l'équation est homogène .

3. On commence par écrire g_0 en fonction de M_t, $\mathcal{G}$ et R_t :

$$g_0 = kM_t^\alpha \mathcal{G}^\beta R_t^\gamma \tag{5}$$

avec k une constante sans dimension. Ce qui donne l'équation aux dimensions :

$$\mathrm{LT}^{-2} = \mathrm{M}^\alpha(\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2})^\beta\mathrm{L}^\gamma \tag{6}$$

On obtient ainsi le système :

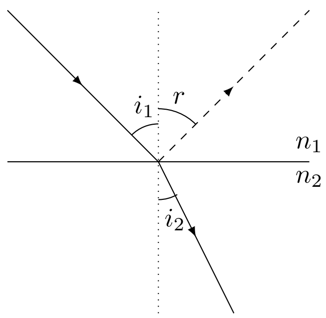
$$\begin{cases} 0 = \alpha - \beta \\ 1 = 3\beta + \gamma \\ -2 = -2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -2 \end{cases} \tag{7}$$

On a donc finalement $\boxed{g_0 = k\frac{\mathcal{G}M_t}{R_t^2}}$

4. La force exercée par la Terre sur un objet situé à sa surface correspond au poids de l'objet $P = mg_0 = \mathcal{G}\frac{mM_t}{R_t^2}$ ce qui donne $g_0 = \frac{\mathcal{G}M_t}{R_t^2}$. La formule trouvé à la question précédente est compatible avec l'expression générale de la force de gravitation et on trouve dans ces conditions que $\boxed{k = 1}$.

Exercice 2 : Étude d'un prisme

I – Lois de Snell – Descartes.



1. Lois de la réflexion (voir schéma ci-dessus) :
   — Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence ;
   — $i_1 = r$.
2. Lois de la réfraction (voir schéma ci-dessus) :
   — Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence ;
   — $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$.
3. Il peut y avoir réflexion totale lorsqu'un rayon passe d'un milieu d'indice n_1 élevé à un milieu d'indice n_2 plus faible. Lorsque l'angle d'incidence est supérieur à $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ alors il n'existe plus de rayon réfracté et la totalité de la lumière est réfléchie.
   Lorsqu'un rayon passe d'un milieu d'indice n_1 faible à un milieu d'indice n_2 plus élevé, alors il existe un angle de réfraction maximum au-delà duquel il n'y a jamais de rayon réfracté. L'angle maximum i_{max} est atteint lorsque l'angle d'incidence est de $\pi/2$. On a alors $i_{\text{max}} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$.

I.1 – Réfraction dans un prisme – Mesure de l'indice d'un verre

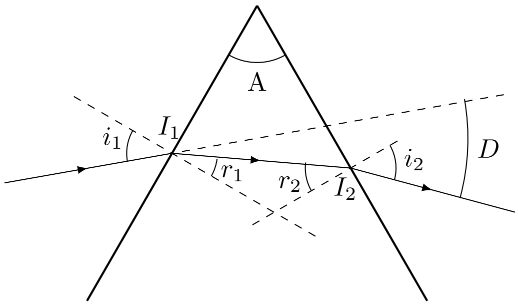


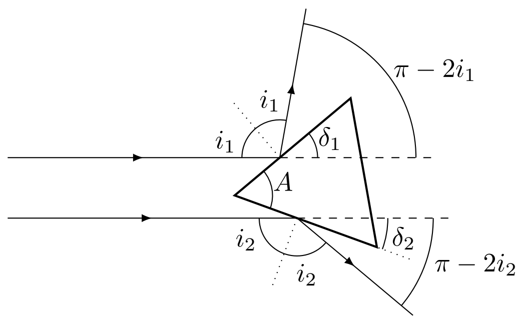
FIGURE 1 – Vue en coupe du prisme perpendiculairement à son arête.

4. Comme on passe d'un milieu d'indice faible (l'air, $n = 1$) à un milieu d'indice plus élevé (le verre), le rayon se rapproche de la normale à l'interface au cours de la réfraction et il ne peut pas y avoir de réflexion totale. Il existera donc toujours un rayon réfracté.
5. Au point I_1, les lois de Descartes donnent $\boxed{\sin(i_1) = n\sin(r_1)}$. Au point I_2, on a de la même manière $\boxed{n\sin(r_2) = \sin(i_2)}$.
6. Dans le triangle formé par le sommet d'angle A du prisme et le rayon traversant le prisme, on a $A + (\pi/2 - r_1) + (\pi/2 - r_2) = \pi$, soit finalement $\boxed{r_1 + r_2 = A}$.
7. L'angle D est égal à la somme des déviations subies par le rayon lumineux. On a donc $D = i_1 - r_1 + i_2 - r_2$. Soit, avec $r_1 + r_2 = A$:
$$\boxed{D = i_1 + i_2 - A} \tag{1}$$
8. Comme $i_1 = i_2 = i_m$, on déduit de la réponse à la question précédente que $D_m = 2i_m - A$, soit $i_m = \frac{A+D_m}{2}$. De même, si $i_1 = i_2$, alors $r_1 = r_2$ et comme $r_1 + r_2 = A$, alors on $2r_1 = A$ soit $r_1 = \frac{A}{2}$. En écrivant la loi de la réfraction en I_1, on obtient $\sin(i_m) = n\sin(r_1)$ soit
$$\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right) = n\sin\left(\frac{A}{2}\right) \quad \text{et finalement} \quad \boxed{n = \frac{\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}} \tag{2}$$

I.2 – Application à la mesure de l'indice d'un verre

1.2.1 Mesure de l'angle A du prisme

9. Faisons un schéma :



Sur ce schéma, on voit que le faisceau du haut est dévié de $\pi - 2i_1$ vers la gauche et le faisceau du bas est dévié de $\pi - 2i_2$ vers la droite. L'angle entre ces deux faisceaux émergeants est donc $\alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi - 2(i_1 + i_2)$.
Or, on remarque que $\delta_1 = \frac{\pi}{2} - i_1$ et $\delta_2 = \frac{\pi}{2} - i_2$. De plus, $A = \delta_1 + \delta_2$. On en déduit que $i_1 + i_2 = \pi - A$.
On en conclut donc que $\alpha_2 - \alpha_1 = 2A$, soit finalement

$$\boxed{A = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}} \tag{3}$$

10. On détermine les valeurs décimales de α_2 et α_1 puis on calcul A, on trouve $\boxed{\mathrm{A} = 60{,}05° = 60°3'}$

1.2.2 Mesure de $D_\mathbf{m}$

11. On remarque que le rayon en trait plein est dévié de D_m vers la droite alors que le rayon en pointillés est dévié de D_m vers la gauche. L'ange entre ces deux directions est donc de $2D_m$. On a donc $\beta_1 - \beta_2 = 2D_m$ et finalement

$$\boxed{D_m = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}} \tag{4}$$

12. On trouve $\boxed{D_m = 38{,}72° = 38°43'}$
13. On utilise l'équation trouvé à la question 8 avec les valeurs de A et D_m et on obtient

$$\boxed{n = \frac{\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} = 1{,}517} \tag{5}$$

I.3 – Loi de Cauchy

14. Vu les incertitudes, les données $\boxed{\text{ne sont pas compatibles}}$ entre elles si on suppose que l'indice est indépendant de la longueur d'onde. On peut notamment calculer l'écart normalisé entre la première et la dernière valeur du tableau, on trouve :

$$\boxed{E_n = \frac{1{,}5376 - 1{,}5192}{\sqrt{(5{,}2 \times 10^{-4})^2 + (5{,}4 \times 10^{-4})^2}} \approx 25 > 2} \tag{6}$$

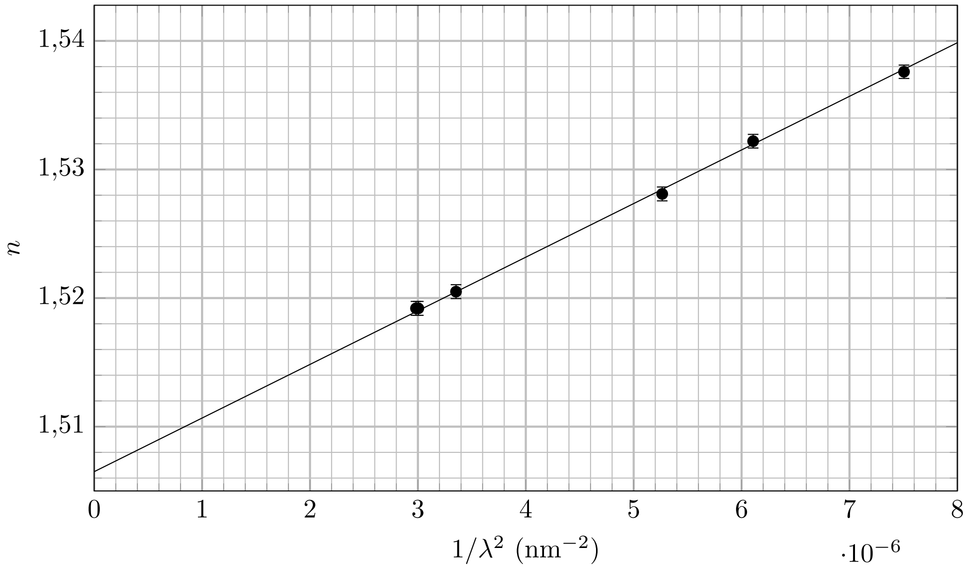


Figure 2 – Évolution de l'indice de réfraction du verre en fonction de $1/\lambda^2$.

15. Lorsqu'on représente n en fonction de $\frac{1}{\lambda^2}$, la loi de Cauchy prévoit que les points forment une droite affine, ce qui semble être le cas sur le graphique fourni.
16. On cherche les paramètres de la droite sur le graphique (ou on fait une régression linéaire à la calculatrice), on trouve $\boxed{a = 1{,}507 \text{ et } b = 4170\,\text{nm}^2}$.
17. La loi de Cauchy montre que l'indice de réfraction est une fonction décroissante de la longueur d'onde. Comme $\lambda_{\text{rouge}} > \lambda_{\text{vert}} > \lambda_{\text{bleu}}$, on a $n_{\text{rouge}} < n_{\text{vert}} < n_{\text{bleu}}$. Or plus l'indice est grand plus un rayon est dévié lors de son passage dans le prisme. On en déduit donc que le rouge est moins dévié que le bleu. Et finalement $\boxed{\textit{couleur 1} = \text{rouge}}$, $\boxed{\textit{couleur 2} = \text{vert}}$ et $\boxed{\textit{couleur 3} = \text{bleu}}$.

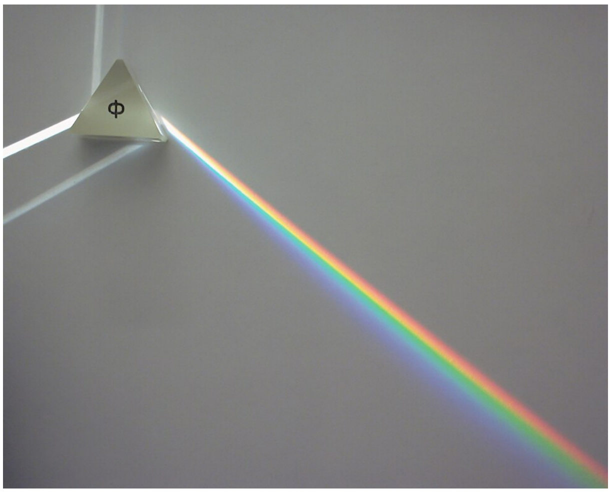


Figure 3 – Décomposition de la lumière blanche par un prisme.