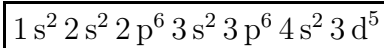


# CHIMIE, MÉCA ET THERMO

## I. Utilisation de l'élément manganèse en chimie inorganique

*D'après E3a 2017 - PC*

- I.1** Le numéro atomique du manganèse est :  $Z(\text{Mn}) = 25$ , ce qui signifie qu'un atome de manganèse a 25 protons dans son noyau. L'atome neutre a donc 25 électrons dans son cortège électronique, que l'on répartit dans les niveaux d'énergie en appliquant la règle de Klechkowski, ce qui donne la configuration électronique fondamentale :



- I.2** Le nombre quantique principal le plus élevé de la configuration électronique est  $n_{\text{max}} = 4$  : le manganèse est donc situé dans la période (ligne) n°4 du tableau périodique.

La configuration électronique se termine en  $d^5$  selon la règle de Klechkowski. Le manganèse est donc dans la 5<sup>ème</sup> colonne du bloc d. Ce bloc étant précédé des deux colonnes du bloc s, il s'agit de la colonne n°7 de la classification.

Le manganèse est situé (période 4 ; colonne 7).

- I.3**  $\text{Mn}^{2+}$  est un ion monoatomique. Le nombre d'oxydation est dans ce cas égal à la charge de l'ion, donc :  $\text{n.o.}(\text{Mn}) = +\text{II}$ .

$\text{MnO}_2$  est un solide ionique. L'oxygène y est au n.o. de -II (ions  $\text{O}^{2-}$ ). Par électroneutralité, on en déduit que les ions du manganèse sont les ions  $\text{Mn}^{4+}$ , donc :  $\text{n.o.}(\text{Mn}) = +\text{IV}$ .

$\text{MnO}_4^-$  est un ion polyatomique. Tous les atomes d'oxygène sont liés à l'atome de manganèse central, donc  $\text{n.o.}(\text{O}) = -\text{II}$ . Comme la somme des n.o. d'un ion polyatomique est égale à la charge de l'ion, on déduit :  $\text{n.o.}(\text{Mn}) = +\text{VII}$ .

- I.4** On constate sur le spectre fourni à la figure 2 que  $\lambda = 520 \text{ nm}$  est approximativement la longueur d'onde du maximum d'absorption de l'ion permanganate en solution.

Choisir cette longueur d'onde  $\lambda_{\text{max}}$  pour des mesures d'absorbances se justifie par deux raisons :

- ★ c'est à cette longueur d'onde que les mesures sont les plus sensibles (A prend des valeurs élevées pour des concentrations faibles) ;
- ★ c'est à cette longueur d'onde que l'incertitude due au réglage de  $\lambda$  est la plus faible, car  $\frac{dA}{d\lambda} = 0$  à  $\lambda = \lambda_{\text{max}}$ .

L'ion permanganate est violet ; ceci est dû au fait qu'il absorbe la couleur complémentaire (opposée au violet sur le cercle chromatique), qui est le vert (aux alentours de 520 nm).

- I.5** Le graphe cherche à illustrer la loi de Beer-Lambert, c'est-à-dire :  $A = \varepsilon \ell C$ , où  $\varepsilon$  est le coefficient d'extinction molaire,  $\ell$  la longueur optique de la cuve, et C la concentration du soluté, ici l'ion permanganate ( $[\text{MnO}_4^-] = C$ ).

En portant les points  $(C_i, A_i)$  sur un graphe, on constate qu'ils paraissent très bien alignés. On a tracé la droite de régression linéaire : les points sont tous très proches de cette droite, ils se disposent de part et d'autre sans organisation apparente, sans courbure. Le coefficient de corrélation confirme la bonne corrélation affine.

On constate également que l'écart entre l'origine et la droite de régression semble du même ordre de grandeur que l'écart entre tous les autres points et la droite, c'est-à-dire infime. On peut donc valider un passage par l'origine.

Enfin, on dispose d'un nombre de points significatif statistiquement (7 points).

Toutes ces observations permettent de conclure :

La loi de Beer-Lambert (relation linéaire entre A et C) est très bien vérifiée ici.

**I.6** D'après l'équation de la droite d'étalonnage (figure 1), la concentration en ions permanganate dans la solution S est

$$C_s = \frac{A_s}{2,12 \cdot 10^3} = 7,12 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

Le volume de cette solution étant  $V_s$ , on en déduit la quantité d'ions permanganate qu'elle contient :  $n = C_s V_s$ .

Or, d'après le protocole décrit, cette quantité provient de la transformation quantitative des ions  $\text{Mn}^{2+}$ , eux-mêmes provenant de tout le manganèse présent dans l'échantillon de ciment initial.

Cet échantillon contenant donc  $n = C_s V_s$  de manganèse, soit une masse de

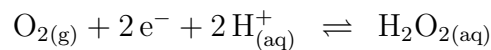
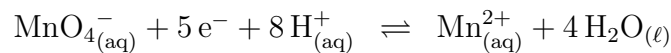
$$m_{\text{Mn}} = C_s V_s \times M(\text{Mn}) = 7,82 \cdot 10^{-4} \text{ g}$$

En rapportant à la masse  $m$  de l'échantillon de ciment, on trouve le pourcentage massique en manganèse demandé :

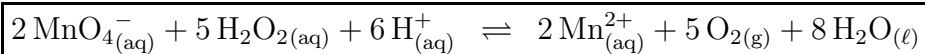
$$w_{\text{Mn}} = \frac{m_{\text{Mn}}}{m} = \frac{A_s V_s M(\text{Mn})}{2,12 \cdot 10^3 m} = 0,051 \%$$

Cette teneur est bien dans l'intervalle indiqué dans l'énoncé pour les ciments usuels.

**I.7** Demi-équations électroniques :



D'où la réaction de titrage :



On note que le nombre d'e<sup>-</sup> échangés est  $n_e = 10$ .

**I.8** À l'équilibre 
$$K^0 = Q_{\text{éq}} = \frac{[\text{Mn}^{2+}]_{\text{éq}}^2 (\text{P}_{\text{O}_2\text{éq}})^5 (c^0)^{11}}{[\text{MnO}_4^-]_{\text{éq}}^2 [\text{H}_2\text{O}_2]_{\text{éq}}^5 [\text{H}^+]_{\text{éq}}^6 (\text{P}^0)^5}$$

Par ailleurs, à l'équilibre, le potentiel de la solution peut être déterminé à partir de n'importe quel couple.

Ainsi, à l'équilibre : 
$$E(\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}) = E(\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_2)$$

Or 
$$E(\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}) = E^0(\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}) + \frac{e^0}{5} \log \left( \frac{[\text{MnO}_4^-]_{\text{éq}} [\text{H}^+]_{\text{éq}}^8}{[\text{Mn}^{2+}]_{\text{éq}} (c^0)^8} \right)$$

Et 
$$E(\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_2) = E^0(\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_2) + \frac{e^0}{2} \log \left( \frac{\text{P}_{\text{O}_2\text{éq}} [\text{H}^+]_{\text{éq}}^2}{[\text{H}_2\text{O}_2]_{\text{éq}} (c^0) (\text{P}^0)} \right)$$

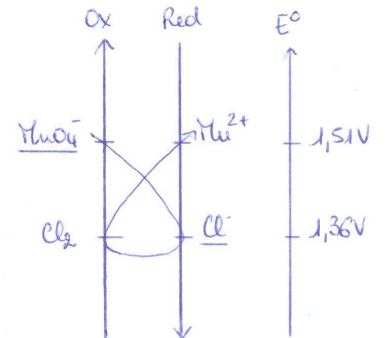
d'où 
$$K^0 = 10^{\frac{10}{e^0} (E^0(\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}) - E^0(\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_2))}$$

Application numérique : 
$$K^0 \approx 10^{+137}$$

$K^0 \gg 1$  : ceci traduit le fait que la réaction est particulièrement favorable thermodynamiquement. Elle convient donc bien a priori pour un titrage, à condition que la cinétique s'y prête également.

**I.9** D'après l'équation de la réaction de titrage, celle-ci consomme des ions  $\text{H}^+$ , qui ne doivent pas être limitants, c'est pourquoi il faut travailler en milieu suffisamment acide.

Cependant, si on acidifie une solution de permanganate de potassium par de l'acide chlorhydrique, on voit que les ions permanganate se trouveront en présence d'ions chlorure. Or on constate que  $E^0(\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}) > E^0(\text{Cl}_{2(\text{g})}/\text{Cl}^-)$ . Ceci traduit le fait qu'en milieu acide, les ions permanganate oxydent quantitativement les ions chlorure, ce qui produit du dichlore et des ions  $\text{Mn}^{2+}$  (cf. ci-contre).



Or le dichlore est un gaz hautement toxique, il faut absolument éviter tout risque de dégagement de ce gaz dans le laboratoire ; il ne faut donc jamais mettre en présence des ions  $\text{MnO}_4^-$  et  $\text{Cl}^-$ .

**I.10** Les ions permanganate sont violets. Avant l'équivalence, ils sont consommés quantitativement par la réaction de titrage et la solution reste incolore. Dès que  $\text{H}_2\text{O}_2$  est épuisé, les ions  $\text{MnO}_4^-$  s'accumulent brusquement et la coloration violette apparaît.

**I.11** Soit  $C_0$  la concentration en  $\text{H}_2\text{O}_2$  de la solution que l'on titre. Elle est obtenue par dilution 10 fois de la solution commerciale donc  $C_0 = \frac{C_{\text{com}}}{10}$ .

Par définition, l'équivalence correspond au volume  $V_E$  de réactif titrant ajouté tel que les réactifs de la réaction de titrage sont apportés dans les proportions stœchiométriques. D'après l'équation écrite à la question 10, on obtient la relation :

$$\frac{n_{\text{MnO}_4^-}^{\text{versés à l'équivalence}}}{2} = \frac{n_{\text{H}_2\text{O}_2}^{\text{initialement dans le bécher}}}{5}$$

Soit 
$$\frac{C V_E}{2} = \frac{C_0 V_0}{5}$$

On en déduit 
$$C_{\text{com}} = \frac{25 C V_E}{V_0}$$

d'où 
$$C_{\text{com}} = 0,899 \text{ mol.L}^{-1}$$

## II. Thermodynamique : cylindre et pistons

### II.1 Transformation AB.

**II.1.a** On applique l'équation d'état des gaz parfaits au contenu du compartiment 0 dans l'état A :

$$m_0 = M_{\text{O}_2} n_{\text{O}_2} = \frac{M_{\text{O}_2} p_A^0 V_A^0}{R T_A^0}$$

soit

$$m_0 = \frac{p_A^0 d_A^0 S}{r_0 T_A^0} = 2,6 \text{ g}$$

De même, on applique l'équation d'état des gaz parfaits au contenu du compartiment 1 dans l'état A :

$$m_1 = \frac{p_A^1 d_A^1 S}{r_1 T_A^1} = 1,7 \text{ g}$$

Établissons au passage un résultat utile pour la suite du problème : avec des notations évidentes,

$$n R = \frac{m}{M} R$$

donc

$$n R = m r$$

**II.1.b** Comme le piston  $\pi_0$  est bloqué, le dioxygène subit une **transformation isochore**. Par conséquent,

$$d_B^0 = d_A^0 = 0,2 \text{ m}$$

Le contact thermique avec le thermostat impose

$$T_B^0 = T_S = 600 \text{ K}$$

et la conservation de la matière fournit

$$\frac{R T_A^0}{p_A^0 S d_A^0} = \frac{R T_B^0}{p_B^0 S d_B^0}$$

d'où

$$p_B^0 = p_A^0 \frac{T_S}{T_A^0} = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

**II.1.c** Le piston  $\pi_1$  est libre de se déplacer et il est en contact avec l'atmosphère, qui se comporte comme un "réservoir" de pression. Le diazote subit alors une **transformation monobare** :

$$p_B^1 = p_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Pa}$$

Le contact thermique avec le thermostat impose également

$$T_B^1 = T_S = 600 \text{ K}$$

et la conservation de la matière fournit à nouveau

$$\frac{R T_A^1}{p_A^1 S d_A^1} = \frac{R T_B^1}{p_B^1 S d_B^1}$$

ce qui donne

$$d_B^1 = d_A^1 \frac{T_S}{T_A^1} = 0,30 \text{ m}$$

**II.1.d** Le dioxygène subit une transformation isochore, donc

$$W_{A \rightarrow B}^0 = 0$$

Le diazote subissant une transformation monobare, le travail reçu vaut

$$W_{A \rightarrow B}^1 = \int_{V_A^1}^{V_B^1} -p_{\text{atm}} dV = -p_{\text{atm}}(V_B^1 - V_A^1)$$

soit

$$W_{A \rightarrow B}^1 = -p_{\text{atm}} S(d_B^1 - d_A^1) = -1,5 \cdot 10^2 \text{ J}$$

**II.1.e** Le premier principe appliqué au système formé par le dioxygène conduit à

$$\Delta U = W_{A \rightarrow B}^0 + Q_{A \rightarrow B}^0$$

d'où

$$Q_{A \rightarrow B}^0 = m_0 c_{v,m}(T_B^0 - T_A^0)$$

Or, pour un gaz parfait de masse molaire  $M$ , la capacité calorifique massique à volume constant vaut

$$c_{v,m} = \frac{R}{M(\gamma - 1)} = \frac{r}{\gamma - 1}$$

On peut finalement exprimer  $Q_{A \rightarrow B}^0$  en fonction des données :

$$Q_{A \rightarrow B}^0 = \frac{m_0 r_0}{\gamma - 1} (T_B^0 - T_A^0) = 5,0 \cdot 10^2 \text{ J}$$

Le même raisonnement appliqué au diazote donne

$$Q_{A \rightarrow B}^1 = \frac{m_1 r_1}{\gamma - 1} (T_B^1 - T_A^1) - W_{A \rightarrow B}^1 = 5,3 \cdot 10^2 \text{ J}$$

On peut également remarquer que le diazote subit une transformation monobare, donc

$$Q_{A \rightarrow B}^1 = \Delta H_{A \rightarrow B} = m_1 c_{p,m} \Delta T$$

Avec  $c_{p,m} = \gamma c_{v,m}$ , il vient finalement

$$Q_{A \rightarrow B}^1 = \frac{m_1 \gamma r_1}{\gamma - 1} (T_B^1 - T_A^1)$$

**II.2** Transformation BC.

**II.2.a** Les deux gaz sont toujours en contact thermique avec la source, donc

$$T_C^0 = T_C^1 = T_S$$

Le piston  $\pi_0$  étant débloquenté, son équilibre mécanique implique, comme il est sans masse, que les deux compartiments sont à la même pression :

$$p_C^0 = p_C^1$$

**II.2.b** Réécrivons cette égalité en faisant intervenir l'équation d'état du gaz parfait :

$$\frac{m_0 r_0 T_C^0}{S d_C^0} = \frac{m_1 r_1 T_C^1}{S d_C^1}$$

d'où

$$d_C^1 = \frac{m_1 r_1}{m_0 r_0} d_C^0$$

De plus, le piston supérieur étant bloqué,  $d_C^0 + d_C^1 = C^{te} = d_B^0 + d_B^1$ , d'où

$$d_C^0 = \frac{d_B^0 + d_B^1}{1 + \frac{m_1 r_1}{m_0 r_0}} = 0,29 \text{ m}$$

Il vient

$$d_C^1 = 0,21 \text{ m}$$

et l'on en tire

$$p_C^0 = p_C^1 = \frac{m_0 r_0 T_S}{S d_C^0} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

**II.2.c** Comme  $\Delta T = 0$

$$\Delta U_{BC} = 0$$

**II.3** La vapeur étant considérée comme un gaz parfait,

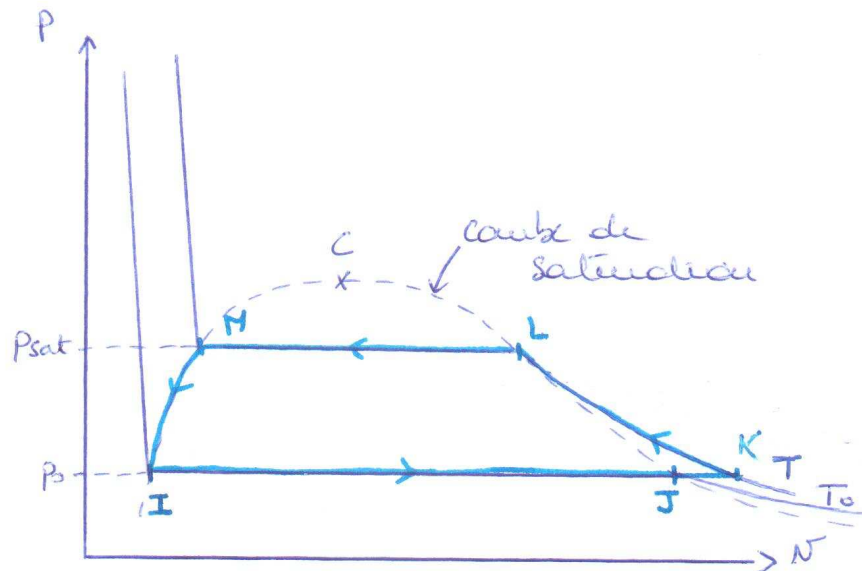
$$v_g = \frac{R T}{M_E p_{\text{sat}}}$$

**II.4** Calculons le rapport  $\frac{v_g}{v_l} = \frac{R T}{v_l M_E p_{\text{sat}}} = \frac{\rho_l R T}{M_E p_{\text{sat}}} = 1,7 \cdot 10^3$ . On en déduit alors

$$v_l \ll v_g$$

**II.5** Diagramme de Clapeyron.

**II.5.a** Le cycle de transformations a l'allure suivante :



**II.5.b** On a les transformations suivantes lors du cycle :

— vaporisation du liquide (IJ) à température  $T_0$  et pression  $p_0$  constantes :

$$\Delta h_{IJ} = \ell_v(T_0)$$

— échauffement de la vapeur (JK) :

$$\Delta h_{JK} = \int_{T_0}^T c_{p,v}(T) dT = c_{p,v}(T - T_0)$$

— compression isotherme (KL) :

$$\Delta h_{KL} = 0$$

— liquéfaction (LM) à température  $T$  et pression  $p_{\text{sat}}$  constantes :

$$\Delta h_{LM} = -\ell_v(T)$$

— refroidissement du liquide (MI) :

$$\Delta h_{MI} = \int_T^{T_0} c_{p,\ell}(T) dT = c_{p,\ell}(T_0 - T)$$

**II.5.c** Sur le cycle, l'enthalpie étant une fonction d'état,

$$\Delta h = 0$$

d'où  $\ell_v(T) = \ell_v(T_0) + (c_{p,v} - c_{p,\ell})(T - T_0)$

soit

$$\ell_v(T) = a + bT \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = \ell_v(T_0) + (c_{p,\ell} - c_{p,v})T_0 \\ b = c_{p,v} - c_{p,\ell} \end{cases}$$

**II.6** État d'équilibre  $\alpha$ .

**II.6.a** À l'équilibre, la pression est égale à la pression de vapeur saturante puisqu'il y a équilibre diphasé. L'application numérique de la formule précédente donne

$$p_\alpha = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

**II.6.b** La masse d'air contenue dans le compartiment 1 vaut

$$m_A = M_A \frac{p_\alpha d_\alpha^1 S}{R T_\alpha} = 1,2 \text{ g}$$

**II.6.c** De même, la masse d'eau vapeur contenue dans le compartiment 0 est

$$m_{E,v} = M_E \frac{p_\alpha (d_\alpha^0 - d_{\alpha,\ell}^0) S}{R T_\alpha} = 0,7 \text{ g}$$

et la masse d'eau liquide est  $m_{E,\ell} = d_{\alpha,\ell}^0 S \rho_\ell = 20 \text{ g}$

On en déduit que le compartiment 0 renferme une masse d'eau totale égale à

$$m_E = M_E \frac{p_\alpha (d_\alpha^0 - d_{\alpha,\ell}^0) S}{R T_\alpha} + d_{\alpha,\ell}^0 S \rho_\ell = 21 \text{ g}$$

**II.6.d** On tire de la formule précédente le titre massique en vapeur d'eau  $x_\alpha = \frac{m_{E,v}}{m_E} = 3,4\%$ .

**II.7** État d'équilibre  $\beta$ .

**II.7.a** Raisonnons par l'absurde en calculant le volume  $V$  occupé par une masse  $m_E$  d'eau vapeur à la température  $T = T_\beta = 390 \text{ K}$ , sous la pression maximale de la vapeur sèche  $p_{\text{sat}}$  :

$$V = \frac{m_E R T_\beta}{M_E p_{\text{sat}}}$$

Une application numérique donnant  $p_{\text{sat}}(390\text{K}) = 1,81 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , il vient finalement  $V = 20 \text{ L}$ , soit  $d^0 = 2 \text{ m}$ . Ceci est impossible, le débattement maximal du piston étant de  $20 \text{ cm}$ .

L'eau ne peut être sous forme de vapeur sèche.

**II.7.b** Si toute l'eau est sous forme liquide, cela suppose que  $p > p_{\text{sat}}$ . Le volume du compartiment inférieur se réduit alors à celui de l'eau liquide, très faible ; le piston supérieur occupe quasiment tout le volume, soit  $d^1 \simeq 20$  cm. On a donc approximativement doublé le volume sans modifier sensiblement la température (elle passe de 380 à 390 K) ; la pression de l'air dans le compartiment 1 vaut alors environ

$$p^1 \simeq \frac{p_\alpha}{2} \simeq 0,65 \cdot 10^5 \text{ Pa} < p_{\text{sat}}(T_\beta)$$

Par suite, il y a contradiction, et

L'eau ne peut se trouver sous forme de liquide seul.

**II.7.c** L'eau est diphasée : la pression d'équilibre est donc la pression de vapeur saturante, soit

$$p_\beta = 1,8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

**II.7.d** On en déduit

$$d_\beta^1 = \frac{m_A R T_\beta}{M_A p_\beta S} = 7,2 \text{ cm}$$

**II.7.e** La masse volumique de la vapeur d'eau vaut

$$\rho_{E,v} = \frac{M_E p_{\text{sat}}}{R T_\beta} = 1,00 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

**II.7.f** Les hauteurs de la zone vapeur  $d_{\beta,v}^0$  et liquide  $d_{\beta,\ell}^0$  dans le compartiment 0 vérifient :

$$d_{\beta,v}^0 + d_{\beta,\ell}^0 = d_\alpha^1 + d_\alpha^0 - d_\beta^1$$

$$m_{E,v} = \rho_{E,v} d_{\beta,v}^0 S \quad m_{E,\ell} = \rho_\ell d_{\beta,\ell}^0 S \quad \text{et} \quad m_{E,v} + m_{E,\ell} = m_E$$

d'où 

$$d_{\beta,\ell}^0 = \frac{m_E - \rho_{E,v} (d_\alpha^1 + d_\alpha^0 - d_\beta^1) S}{(\rho_\ell - \rho_{E,v}) S}$$
 et 

$$d_{\beta,v}^0 = d_\alpha^1 + d_\alpha^0 - d_\beta^1 - d_{\beta,\ell}^0$$

*Applications Numériques :*

$$d_{\beta,\ell}^0 = 1,9 \text{ mm} \quad \text{et} \quad d_{\beta,v}^0 = 12,6 \text{ cm}$$

**II.7.g** Le titre massique en vapeur vaut maintenant

$$x_\beta = 6,1 \%$$

### III. La planète Terre

*D'après CCINP 2025 - MP*

**III.1** Le référentiel géocentrique a son centre au centre de masse de la Terre, et ses trois axes dirigés vers trois étoiles fixes. Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le mouvement d'un point matériel isolé est rectiligne et uniforme.

**III.2** On a immédiatement

$$\vec{F}_g = -\frac{GmM_T}{r^2} \vec{u}$$

**III.3** — Référentiel : référentiel géocentrique, supposé galiléen ;  
 — Système : mobile quelconque, de masse  $m$  et assimilé à un point matériel  $M$  ;  
 — Hypothèses : une seule action, celle de la Terre ;  
 — Bilan des actions s'exerçant sur  $m$  :

★ la force d'interaction gravitationnelle  $\vec{F}_g = -\frac{GmM_T}{r^2} \vec{u}$

Le théorème du moment cinétique appliqué au mobile par rapport à  $O$ , centre de la Terre, donne :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O(M)}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_g) = \vec{0}$$

d'où

$$\vec{\mathcal{L}}_O(M) = \vec{C}^{te}$$

Or,  $\vec{\mathcal{L}}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$  donc  $\forall t$ , le mobile évolue dans le plan perpendiculaire à  $\vec{\mathcal{L}}_O(M)$  et contenant  $\vec{OM}(t=0)$  et  $\vec{v}(t=0)$ .

Le mouvement est plan.

**III.4** On cherche l'énergie potentielle gravitationnelle  $E_{pg}$  telle que  $\vec{F}_g = -\vec{\text{grad}}(E_p)$ .

Ainsi

$$-\frac{GmM_T}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{dE_p}{dr} \vec{e}_r$$

d'où

$$E_p = -\frac{GmM_T}{r}$$

**III.5** La seule force subie par  $M$  est conservative. Ainsi, d'après le théorème de l'énergie mécanique :

$$E_m = C^{te}.$$

$$E_m = E_{pg} + E_c = -\frac{GmM_T}{r} + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = -\frac{GmM_T}{r} + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right)$$

Or

$$\vec{\mathcal{L}}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = \vec{C}^{te}$$

On en déduit que

$$r^2\dot{\theta} = C^{te} = \frac{\mathcal{L}_O}{m}$$

On en déduit

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\mathcal{L}_O^2}{2mr^2} - \frac{GmM_T}{r}}_{E_{p,eff(r)}}$$

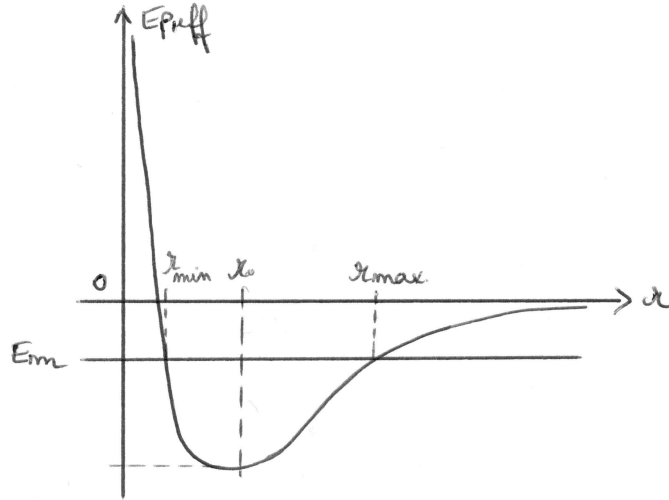
**III.6** On a

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{\geq 0} + E_{p,\text{eff}}(r)$$

Ainsi

$$E_m \geq E_{p,\text{eff}}(r)$$

**III.7** On s'intéresse ici à l'énergie mécanique d'une trajectoire associée à un état lié. On a donc forcément  $E_m \leq 0$ .



**III.8** L'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective lorsque l'énergie cinétique radiale  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$  est nulle. Dans le cas de l'ellipse, il s'agit des cas où le mobile passe au périhélie ( $r = r_{\min}$ ) et à l'apogée ( $r = r_{\max}$ ).

On a ainsi

$$E_m = E_{p,\text{eff}}(r_{\min}) = E_{p,\text{eff}}(r_{\max})$$

Lorsque l'énergie mécanique est égale au minimum de l'énergie potentielle effective, le mouvement du mobile est circulaire, de rayon  $r = r_0$  :

$$E_m = E_{p,\text{eff min}} = E_{p,\text{eff}}(r_0)$$

**III.9** Sur l'orbite altimétrique de référence (orbite circulaire de rayon  $R$ ), d'après la deuxième loi de Newton appliquée au mobile de masse  $m$  :

$$m\vec{\gamma} = \vec{F}_g$$

Les vitesses et accélération en coordonnées polaires s'écrivent, sur l'orbite circulaire de rayon  $R$  :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v_{\text{alt}}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{\gamma} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Projection sur  $\vec{e}_r$  :  $-m\frac{v_{\text{alt}}^2}{R} = -\frac{GmM_T}{R^2} \iff v_{\text{alt}} = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$

D'où

$$E_{m,\text{alt}} = \frac{1}{2}mv_{\text{alt}}^2 - \frac{GmM_T}{R}$$

$$E_{m,\text{alt}} = -\frac{GmM_T}{2R}$$

**III.10** La période de révolution  $T$  est telle que  $T = \frac{2\pi R}{v_{\text{alt}}} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{GM_T}}$ .

Finalement

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}}$$

**III.11** On utilise pour ce faire les deux positions pour lesquelles on a  $\dot{r} = 0$ , à savoir les positions  $r_{\text{min}} = R_c$  (périgée) et  $r_{\text{max}} = R$  (apogée).

À l'apogée 
$$E_{m,\text{tr}} = 0 + \frac{\mathcal{L}_O^2}{2mR^2} - \frac{GmM_T}{R}$$

Donc 
$$\frac{\mathcal{L}_O^2}{2m} = R^2 \left[ E_{m,\text{tr}} + \frac{GmM_T}{R} \right]$$

Au périgée 
$$E_{m,\text{tr}} = 0 + \frac{\mathcal{L}_O^2}{2mR_c^2} - \frac{GmM_T}{R_c} = \frac{R^2}{R_c^2} \left[ E_{m,\text{tr}} + \frac{GmM_T}{R} \right] - \frac{GmM_T}{R_c}$$

d'où

$$\boxed{E_{m,\text{tr}} = -\frac{GmM_T}{R + R_c}}$$

**III.12** 
$$\Delta E_m = E_{m,\text{tr}} - E_{m,\text{alt}} = -GmM_T \left[ \frac{1}{R + R_c} - \frac{1}{2R} \right] = -GmM_T \frac{R - R_c}{2R(R + R_c)} < 0$$

Il faut donc que  $E_m$  diminue. Comme par ailleurs, au lieu A de ce changement d'orbite,  $E_p = E_p(R)$  reste la même, on en déduit que  $\Delta E_m = \Delta E_c$ .

Il faut donc que  $v_{A,\text{tr}} < v_{A,\text{alt}}$  donc il faut freiner le satellite.

**III.13** De la même façon en P :

$$\Delta E'_m = E_{m,\text{cim}} - E_{m,\text{tr}} = -GmM_T \left[ \frac{1}{2R_c} - \frac{1}{R + R_c} \right] = -GmM_T \frac{R - R_c}{2R_c(R + R_c)} < 0$$

Il faut donc de nouveau que l'énergie mécanique diminue. Comme par ailleurs, au lieu P de ce changement d'orbite,  $E_p = E_p(R_c)$  reste la même, on en déduit que  $\Delta E'_m = \Delta E'_c$ .

Il faut donc que  $v_{A,c} < v_{A,\text{tr}}$  donc il faut freiner le satellite.

