

DE LA MÉCA ET UN PEU DE CHIMIE

I. Ions chlorure et méthode de Mohr

I.1 L'énoncé précise ceci : « on dispose de $V_0 = 100$ mL d'eau de mer (solution S_0) de concentration C_0 en ions chlorure. Compte tenu de la forte teneur en ions chlorure dans l'eau de mer, cette solution est diluée dix fois, on obtient la solution S_1 . »

Il vient immédiatement

$$C_1 = \frac{C_0}{10}$$

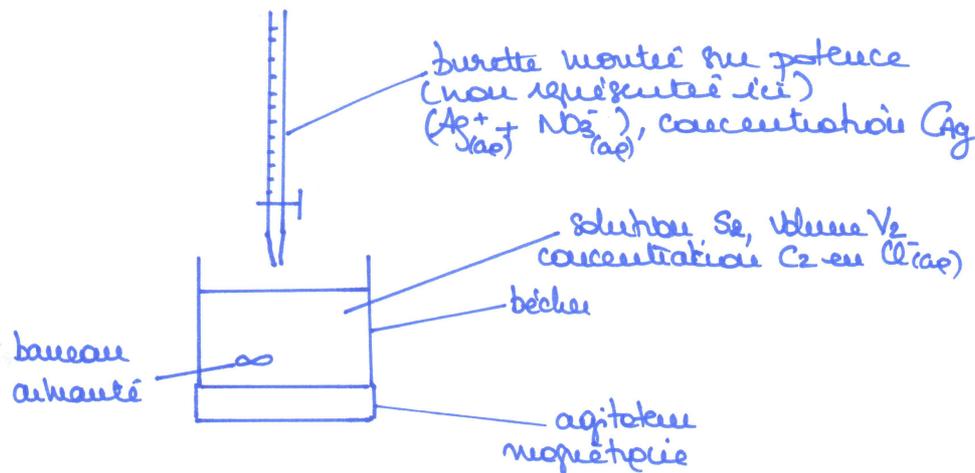
Par ailleurs

$$C_2 = \frac{n_{\text{Cl}^- \text{ à titrer}}}{V_2}$$

d'où

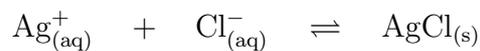
$$C_2 = \frac{C_1 V_1}{V_1 + V_2}$$

I.2 Le schéma détaillé du dispositif expérimental réalisé pour ce titrage est le suivant :



I.3 Étude détaillée des réactions.

I.3.a La réaction est



K_1^0

Par définition

$$K_1^0 = \frac{a(\text{AgCl}_{(\text{s})})_{\text{éq}}}{a(\text{Ag}_{(\text{aq})}^+)_{\text{éq}} \times a(\text{Cl}_{(\text{aq})}^-)_{\text{éq}}}$$

Donc ici

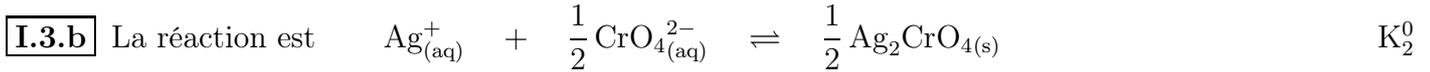
$$K_1^0 = \frac{c^{02}}{[\text{Ag}_{(\text{aq})}^+]_{\text{éq}} \times [\text{Cl}_{(\text{aq})}^-]_{\text{éq}}}$$

On a donc

$$K_1^0 = 10^{\text{p}K_{s1}}$$

Application numérique :

$$K_1^0 = 10^{9,8} = 6,3 \cdot 10^9$$



Par définition
$$K_2^0 = \frac{a(\text{Ag}_2\text{CrO}_{4(\text{s})})^{1/2} \epsilon_{\text{eq}}}{a(\text{Ag}_{(\text{aq})}^+) \epsilon_{\text{eq}} \times a(\text{CrO}_{4(\text{aq})}^{2-})^{1/2} \epsilon_{\text{eq}}}$$

Donc ici
$$K_2^0 = \frac{c^{03/2}}{[\text{Ag}_{(\text{aq})}^+] \epsilon_{\text{eq}} \times [\text{CrO}_{4(\text{aq})}^{2-}]^{1/2} \epsilon_{\text{eq}}}$$

On a donc
$$K_2^0 = 10^{\frac{pK_{s2}}{2}}$$

Application numérique :
$$K_2^0 = 1,0 \cdot 10^6$$

I.3.c Les deux réactions ont été écrites avec le même coefficient stoechiométrique devant la particule d'échange, à savoir $\text{Ag}_{(\text{aq})}^+$. On peut donc comparer directement K_1^0 et K_2^0 .

Comme $K_1^0 > 10^3 \times K_2^0 \gg 1$, les deux réactions sont totales mais la réaction (1) a lieu avant (2) : on peut donc se servir de la réaction (2) (qui se traduit par un précipité rouge brique de chromate d'argent) pour repérer la fin de la réaction (1) et donc repérer la fin du dosage des ions chlorure par les ions argent (I).

I.4 Exploitations du titrage.

I.4.a Pour déterminer la concentration C_1 des ions chlorure dans la solution S_1 , dressons un tableau d'avancement molaire relatif à la réaction de titrage :

	$\text{Cl}_{(\text{aq})}^-$	$\text{Ag}_{(\text{aq})}^+$	$\text{AgCl}_{(\text{s})}$
$t = 0$	$C_1 V_1$	$C_{\text{Ag}} V_{\text{Ag}}$	0
$t_{\text{avant l'équivalence}}$	$C_1 V_1 - C_{\text{Ag}} V_{\text{Ag}}$	≈ 0	$C_{\text{Ag}} V_{\text{Ag}}$
$t_{\text{équivalence}}$	$C_1 V_1 - C_{\text{Ag}} V_{\text{AgE}} \approx 0$	≈ 0	$C_{\text{Ag}} V_{\text{AgE}}$

À l'équivalence d'un dosage, on a par définition

$$\frac{n_{\text{titré}}^{\text{initial}}}{\alpha_{\text{titré}}} = \frac{n_{\text{titrant}}^{\text{versé}}}{\alpha_{\text{titrant}}}$$

Ce qui se traduit ici par
$$C_1 V_1 = C_{\text{Ag}} V_{\text{AgE}}$$

On en déduit
$$C_1 = \frac{C_{\text{Ag}} V_{\text{AgE}}}{V_1}$$

Application numérique :
$$C_1 = 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

I.4.b *Application numérique :*
$$C_0 = 10 C_1 = 5,5 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

I.5 Il y a précipitation du chlorure d'argent dès l'ajout de la première goutte de la solution de nitrate d'argent si le quotient de réaction Q_i de la réaction de précipitation de $\text{AgCl}_{(s)}$ est tel que

$$Q_i \leq K_1^0 = \frac{1}{K_{s1}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{Q_i} \geq K_{s1}$$

avec

$$Q_i = \frac{c^{02}}{[\text{Ag}_{(aq)}^+]_i [\text{Cl}_{(aq)}^-]_i}$$

l'indice « i » (initial) faisant référence à la solution juste après avoir versé une goutte de nitrate d'argent dans la solution S_2 mais juste avant que cette goutte ne réagisse. Le volume total de la solution est alors

$$V_{\text{bêcher}} + V_{\text{goutte}} = V_2 + V_{\text{goutte}} = V_1 + V + V_{\text{goutte}}$$

Lorsque la première goutte de nitrate d'argent est ajoutée, on a :

$$[\text{Ag}_{(aq)}^+]_i = \frac{C_{\text{Ag}} V_{\text{goutte}}}{V_1 + V + V_{\text{goutte}}} \quad \text{et} \quad [\text{Cl}_{(aq)}^-]_i = \frac{C_1 V_1}{V_1 + V + V_{\text{goutte}}}$$

alors

$$\frac{1}{Q_i} = \frac{C_{\text{Ag}}^2 V_{\text{goutte}} V_{\text{AgE}}}{(V_1 + V + V_{\text{goutte}})^2 c^{02}}$$

Application numérique :

$$\frac{1}{Q_i} = 1,1 \cdot 10^{-5} > K_{s1}$$

Il y a bien précipitation de $\text{AgCl}_{(s)}$ dès la première goutte de solution de nitrate d'argent versée.

I.6 Dans le volume $V_2 = 5,5$ mL de solution S_2 :

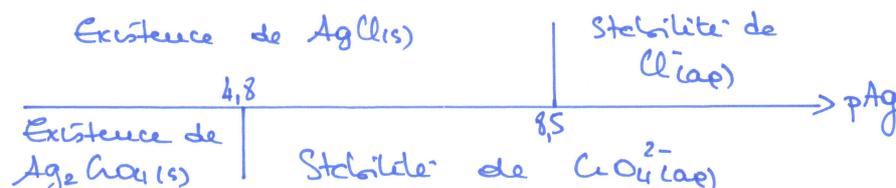
- $[\text{Cl}_{(aq)}^-]_{S_2} = \frac{C_1 V_1}{V_2} = C_2$ et le précipité de $\text{AgCl}_{(s)}$ existe pour $\frac{[\text{Ag}_{(aq)}^+][\text{Cl}_{(aq)}^-]_{S_2}}{c^{02}} \geq K_{s1}$, soit

$$p\text{Ag} = -\log\left(\frac{[\text{Ag}_{(aq)}^+]}{c^0}\right) \leq pK_{s1} + \log\left(\frac{[\text{Cl}_{(aq)}^-]_{S_2}}{c^0}\right) = 8,5$$

- $[\text{CrO}_{4(aq)}^{2-}]_{S_2} = \frac{C V}{V_2}$ et le précipité de $\text{Ag}_2\text{CrO}_{4(s)}$ existe pour $\frac{[\text{Ag}_{(aq)}^+]^2 [\text{CrO}_{4(aq)}^{2-}]_{S_2}}{c^{03}} \geq K_{s2}$, soit

$$p\text{Ag} = -\log\left(\frac{[\text{Ag}_{(aq)}^+]}{c^0}\right) \leq \frac{1}{2} \left(pK_{s2} + \log\left(\frac{[\text{CrO}_{4(aq)}^{2-}]_{S_2}}{c^0}\right) \right) = 4,8$$

D'où le diagramme d'existence



I.7 Attention, ici, compte-tenu des volumes mis en jeu, on ne peut pas du tout négliger l'effet de dilution. La réponse à la question 6. ne peut être utilisée ici.

La concentration résiduelle en ions chlorure est telle que

$$\frac{[\text{Cl}_{(\text{aq})}^-]_{\text{éq}} [\text{Ag}_{(\text{aq})}^+]_{\text{éq}}}{c^0} = K_{s1}$$

Par ailleurs, lorsque le précipité rouge brique apparaît :

$$\frac{[\text{Ag}_{(\text{aq})}^+]_{\text{éq}}^2 [\text{CrO}_{4(\text{aq})}^{2-}]_{\text{éq}}}{c^0} = K_{s2}$$

avec
$$[\text{CrO}_{4(\text{aq})}^{2-}]_{\text{éq}} = \frac{CV}{V_2 + V_{\text{AgE}}}$$

d'où
$$[\text{Ag}_{(\text{aq})}^+] = c^0 \sqrt{\frac{c^0 K_{s2} (V_2 + V_{\text{AgE}})}{CV}}$$

Application numérique :
$$[\text{Ag}_{(\text{aq})}^+] = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

On en déduit
$$[\text{Cl}_{(\text{aq})}^-]_{\text{éq}} = K_{s1} c^0 \sqrt{\frac{CV}{V_2 + V_{\text{AgE}}} \frac{1}{K_{s2} c^0}}$$

Application numérique :
$$[\text{Cl}_{(\text{aq})}^-]_{\text{éq}} = 6,2 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$$

On peut dire que le dosage est quantitatif puisque $[\text{Cl}_{(\text{aq})}^-] < \frac{[\text{Cl}_{(\text{aq})}^-]_{\text{initiale}}}{100}$: la quasi totalité des ions chlorure a été consommée lors du dosage.

II. Mouvement dans un tube d'oscilloscope

- Référentiel : référentiel terrestre, galiléen ;
- Système : électron M, de masse m et de charge $q = -e$;
- Hypothèses : frottements, poussée d'Archimède et poids négligés.

II.1 L'électron n'est soumis ici qu'à la force électrique \vec{f}_e (dirigée suivant $-\vec{u}_x$), conservative et dérivant de l'énergie potentielle électrique $E_p = qV$.

Théorème de l'énergie mécanique : $E_{c,f} - E_{c,i} = W(\vec{f}_e)$

En d'autres termes $\frac{1}{2}mv_0^2 - 0 = -(E_{p,f} - E_{p,i}) = eV_0$

Finalement

$$\vec{v}_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}} \vec{u}_x$$

Application numérique :

$$\|\vec{v}_0\| = 1,83 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

II.2 Par définition

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

On a donc

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y = -\frac{dV}{dy} \vec{u}_y$$

Finalement

$$\vec{E} = -\frac{2V_p}{d} \vec{u}_y$$

II.3 L'électron n'est soumis ici qu'à la force électrique $\vec{f}_e = -e\vec{E} = \frac{2eV_p}{d} \vec{u}_y$.

2^{ème} loi de Newton à m constante : $m\vec{\gamma} = \vec{f}_e$

Ou encore $m(\ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z) = \frac{2eV_p}{d} \vec{u}_y$

En considérant l'origine des temps au moment où l'électron pénètre dans le condensateur :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = \frac{2eV_p}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 t - \frac{\ell}{2} \\ y = \frac{eV_p}{md} t^2 \end{cases}$$

On en déduit

$$t = \frac{x + \frac{\ell}{2}}{v_0}$$

Et finalement

$$y(x) = \frac{eV_p}{mdv_0^2} \left(x + \frac{\ell}{2}\right)^2$$

II.4 Étude de l'impact sur l'écran

II.4.a Puisque le champ électrique est nul en dehors du condensateur, il n'y a plus de force appliquée et l'électron a donc un mouvement rectiligne uniforme.

On a donc
$$y(x > \ell/2) = y(\ell/2) + \frac{dy}{dx}(\ell/2) \times (x - \ell/2)$$

avec $\frac{dy}{dx}(\ell/2)$ qui peut se trouver grâce à la question précédente.

En remplaçant
$$y(x) = \frac{eV_p}{mdv_0^2}\ell^2 + \frac{2eV_p}{mdv_0^2}\left(\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2}\right) \times (x - \ell/2)$$

d'où

$$y(x) = \frac{2eV_p\ell}{mdv_0^2}x$$

II.4.b L'ordonnée du spot sur l'écran est $y_s = y(x = D)$. Ainsi :

$$y_s = \frac{V_p\ell D}{V_0d}$$

.

II.4.c Application numérique :

$$y_s = 2,65 \text{ cm}$$

III. Autour d'ITER

- III.1** — Référentiel : référentiel terrestre, galiléen ;
 — Système : particule de charge e et de masse m ;
 — Hypothèses : pas de frottements ;
 — Bilan des actions s'exerçant sur la particule :

★ la force électrostatique $\vec{f}_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$, dérivant de l'énergie potentielle $E_p(r)$.

Par définition de l'énergie potentielle

$$dE_p = -\delta W(\vec{f}_e) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi)$$

Soit donc

$$\frac{dE_p}{dr} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

En primitivant

$$E_p(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + C^{\text{te}}$$

Pour satisfaire la contrainte demandée par l'énoncé ($E_p(r \rightarrow \infty) = 0$), on a $C^{\text{te}} = 0$.

Finalement

$$E_p(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- III.2** Directement

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- III.3** D'après le théorème de l'énergie mécanique, $E_m(t) - E_m(t=0) = W_{nc} = 0$ (avec t un instant quelconque). Pour se rapprocher à une distance inférieure à r_0 , il faut déjà être capable d'arriver en r_0 avec une vitesse non nulle (ou nulle dans le pire des cas), on prend pour t l'instant où l'on arrive en r_0 :

$$E_m(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \geq \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

Or d'après le théorème de l'énergie mécanique vu plus haut, $E_m(t) = E_m(t=0)$.

Ainsi

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \times (r \rightarrow \infty)} \geq \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

d'où

$$E_{c0} \geq E_{c0\text{min}} \quad \text{avec} \quad E_{c0\text{min}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

- III.4** D'après l'énoncé

$$T = \frac{E_{c0\text{min}}}{k} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 k r_0}$$

Application numérique :

$$T = 2.10^{10} \text{ K}$$

- III.5** — Référentiel : référentiel terrestre, galiléen ;
 — Système : particule de charge q et de masse m ;
 — Hypothèses : pas de frottements ; poids négligé ;
 — Bilan des actions s'exerçant sur la particule :

$$\star \text{ la force magnétique } \vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q(v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z) \wedge B \vec{u}_z = qB(-v_x \vec{u}_y + v_y \vec{u}_x + \vec{0}).$$

D'après la 2^{ème} loi de Newton à m constante :

$$m \vec{\gamma} = \vec{F}_m$$

Par projection : $m\ddot{x} = qBv_y \quad m\ddot{y} = -qBv_x \quad m\ddot{z} = 0$

La vitesse initiale étant selon z , vu les équations ci-dessus, on a $m\dot{v}_x(t=0) = 0$ et donc, à instant infiniment plus court plus tard, v_x n'a pas changé et est toujours nulle. De même pour v_y . Ainsi, un peu plus tard, la vitesse n'est à nouveau que selon \vec{u}_z . Donc on va avoir un mouvement rectiligne selon z et la force est nulle.

Le mouvement est rectiligne uniforme tel que $x(t) = y(t) = 0$ et $z(t) = v_0 t$.

NB : On peut aussi justifier en disant que la force magnétique ne travaille pas, donc $v = C^{te} = v_0$. La résolution de l'équation selon z donne que $\forall t; v_z = v_0$. Puisque par ailleurs $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, on peut en déduire que $\forall t; v_x^2 + v_y^2 = 0$, soit $v_x = v_y = 0$ et on obtient un mouvement rectiligne uniforme.

- III.6** D'après la deuxième loi de Newton écrite plus haut :

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = qBv_y \\ m\dot{v}_y = -qBv_x \\ m\dot{v}_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{v}_x = -\omega_0 v_y & (1) \\ \dot{v}_y = \omega_0 v_x & (2) \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases}$$

- III.7** En dérivant (1) et en injectant (2), on obtient : $\ddot{v}_x = -\omega_0 \dot{v}_y = -\omega_0^2 v_x$, ou encore :

$$\ddot{v}_x + \omega_0^2 v_x = 0$$

De la même façon,

$$\ddot{v}_y + \omega_0^2 v_y = 0$$

- III.8** On reconnaît les équations différentielles d'oscillateurs harmoniques.

Ainsi $v_x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$ et $v_y(t) = C_3 \cos(\omega_0 t) + C_4 \sin(\omega_0 t)$

Pour déterminer les constantes d'intégration, on utilise les conditions initiales :

$$v_x(t=0) = 0 \quad v_y(t=0) = v_0$$

Par ailleurs $\dot{v}_x(t=0) = -\omega_0 v_y(t=0) = -\omega_0 v_0$ d'après (1)

et $\dot{v}_y(t=0) = \omega_0 v_x(t=0) = 0$ d'après (2)

Finalement

$$v_x(t) = -v_0 \sin(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad v_y(t) = v_0 \cos(\omega_0 t)$$

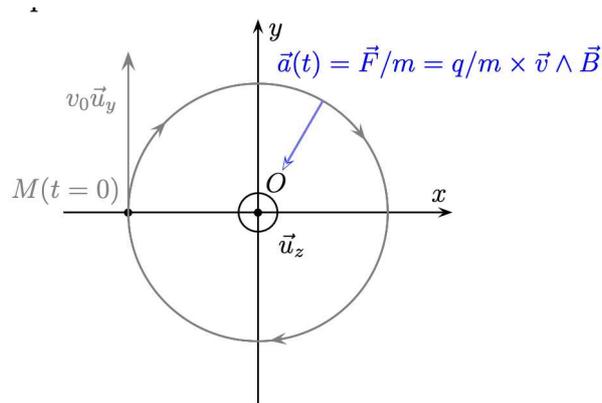
- III.9** On intègre en prenant en compte les conditions initiales. Ainsi :

$$z(t) = 0 \quad x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

III.10Le mouvement se fait dans le plan $z = 0$.

Comme
$$x(t)^2 + y(t)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 \times (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) = \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2$$

La trajectoire est un cercle de centre O et de rayon $\frac{v_0}{|\omega_0|} = \frac{mv_0}{qB}$.

III.11 Schéma de la trajectoire dans le plan Oxy montrant clairement le sens du mouvement de la particule.**III.12** On considère maintenant une particule dont la vitesse initiale est :

$$\vec{v}_0 = \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = v_{\perp} \\ v_z = v_{\parallel} \end{cases}$$

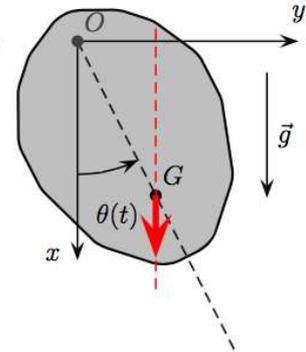
On peut reprendre les calculs précédents en observant que le mouvement selon z et celui dans le plan Oxy sont indépendants. C'est donc une combinaison de la première question (translation rectiligne uniforme selon z) et des suivantes (cercle dans le plan Oxy), cela correspond donc bien à une hélice de pas constant. Il suffit de remplacer v_0 par v_{\parallel} dans la première question et par v_{\perp} dans les suivantes.

Dans le plan Oxy , la particule fait un tour en $T = 2\pi/|\omega_0|$ et donc pendant ce temps elle monte de

$$h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi}{|\omega_0|} v_{\parallel}$$

IV. Mesure de l'intensité du champ de pesanteur terrestre en un point

- Référentiel : terrestre galiléen ;
- Système : pendule de masse m , de centre d'inertie G et de moment d'inertie J par rapport à l'axe (Oz) ;
- Hypothèses : absence de frottements et liaison pivot parfaite $z \odot$
- Bilan des forces s'exerçant sur le pendule :
 - ★ le poids : $\vec{P} = m \vec{g} = mg \vec{e}_x$ qui s'applique en G ;
 - ★ les actions de la liaison pivot, de résultante \vec{F} , qui s'appliquent au niveau de l'axe (Oz) , de moment $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}) =$



IV.1 Il s'agit d'une liaison pivot.

IV.2 Par définition $J = \sum_i m_i r_i^2$

Le moment d'inertie augmente lorsque les masses sont loin de l'axe de rotation. Ainsi, le solide 2 est celui pour lequel les masses sont le plus proche de l'axe de rotation, il a donc le moment d'inertie le plus faible, le solide 3 au contraire a les masses les plus éloignées de l'axe de rotation, il a donc le moment d'inertie le plus élevé.

IV.3 Le bras de levier du poids est $a \sin(\theta)$, le poids tend à faire tourner vers les θ décroissants. Le moment du poids par rapport à (Oz) est donc

$$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = -mga \sin(\theta)$$

D'après le théorème du moment cinétique scalaire, on obtient $J\ddot{\theta} = -mga \sin \theta$.

IV.4 Dans le cas des petites oscillations, $\sin \theta \simeq \theta$. On en déduit $\ddot{\theta} + \frac{mga}{J} \theta = 0$.

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J}}$.

On en déduit $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}$

IV.5 Influence d'une variation d'intensité Δg .

IV.5.a Compte-tenu des notations proposées par l'énoncé, on a

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}} \quad \text{et} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{ma(g + \Delta g)}}$$

Donc
$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\Delta g}{g}}} = T_1 \left(1 + \frac{\Delta g}{g}\right)^{-1/2}$$

d'où
$$T_2 \approx T_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}\right)$$

IV.5.b Directement
$$s = \frac{T_2 - T_1}{T_1} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$$

