

DE LA MÉCA ET DE LA CHIMIE

JEUDI 5 MARS 2026 - DURÉE 4H00

- ★ La calculatrice est autorisée.
- ★ Le téléphone portable est interdit.
- ★ Il sera tenu le plus grand compte du soin, de la présentation, et de la rédaction.
- ★ Chaque réponse doit être justifiée.
- ★ Par ailleurs, même lorsque ce n'est pas explicitement demandé, toute application numérique doit être précédée d'une expression littérale en fonction des données de l'énoncé.

I. Mesure de viscosité dans une éprouvette

On considère une sphère de rayon $r = 1,0 \text{ mm}$ et de masse volumique $\rho_0 = 7,88 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, assimilée à toutes fins utiles à un point matériel de taille négligeable. Cette sphère est lancée depuis le point A ($x_A, 0$), centre de l'éprouvette, avec une vitesse $v_A = 1,0 \text{ m.s}^{-1}$ faisant un angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'horizontale (cf schéma) dans un fluide qui est un mélange d'eau et de glycérol, de masse volumique $\rho = 1,22 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. La bille est, entre autres, soumise à une force de frottement fluide qui s'écrit

$$\vec{F} = -6\pi \eta r \vec{v}$$

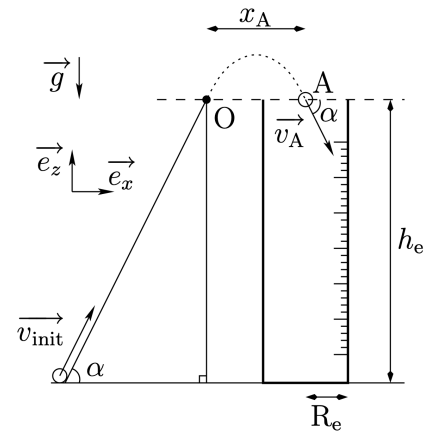


FIGURE 1 - Dispositif étudié

où $\vec{v}$ est la vitesse de la bille par rapport au fluide et η la viscosité du fluide qui s'exprime en Pa.s. On notera $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur ($g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$). Le point O est choisi comme origine du repère avec l'axe horizontal Ox tel que $\vec{v}_A \cdot \vec{e}_x > 0$ et l'axe vertical Oz ascendant. On posera $\tau = 2\rho_0 r^2 / (9\eta)$. L'expérience est réalisée dans une éprouvette graduée de rayon $R_e = 2,0 \text{ cm}$ et de hauteur $h_e = 15 \text{ cm}$.

1. a) Vérifier que l'expression de $\vec{F}$ est cohérente avec l'unité de η .
 - b) i. Établir l'équation différentielle (vectorielle) vérifiée par la vitesse.
 - ii. La résoudre selon Ox et Oz pour trouver l'expression de la vitesse $\vec{v}$ au cours du temps en fonction de ρ_0 , ρ , $\vec{v}_A$, $\vec{g}$ et τ .
 - iii. Montrer qu'il existe une vitesse limite $\vec{v}_{\text{lim}}$ et donner son expression.
 - iv. Donner l'expression de la durée Δt au bout de laquelle on peut la considérer atteinte.
 - v. On mesure une vitesse limite $v_{\text{lim}} = \|\vec{v}_{\text{lim}}\| = 11,6 \text{ cm.s}^{-1}$. Déterminer les valeurs de η et τ .
 - vi. Si la bille avait un rayon $2r$, quelles seraient les nouvelles valeurs de v_{lim} et Δt ? En donner une interprétation physique.
 - c) i. Établir l'expression des positions $x(t)$ et $z(t)$ de la bille au cours du temps.
 - ii. Quelles doivent être les dimensions minimales h_{e0} et R_{e0} de l'éprouvette? On les exprimera en fonction de v_{lim} , Δt , v_A , α et τ . L'éprouvette choisie est-elle adaptée?
2. Pour amener la bille jusqu'au point A précédent, on utilise un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale sur lequel la bille glisse sans frotter. Le plan incliné démarre à la même altitude que l'éprouvette et s'arrête en O origine du repère
 - a) Déterminer la vitesse $\vec{v}_O$ de la bille en O afin qu'elle atteigne le point A avec la vitesse $\vec{v}_A$.
 - b) Quel doit être le lien entre x_A , v_A et α pour que cela fonctionne? Application numérique.
 - c) Quelle doit être la vitesse $\vec{v}_{\text{init}}$ au pied du plan incliné pour que l'ensemble du dispositif marche? Application numérique.
3. Quelques jours plus tard, vous désirez refaire l'expérience mais impossible de remettre la main sur l'éprouvette utilisée initialement. Vous êtes donc contraints d'utiliser une éprouvette de même rayon R_e mais de hauteur $h > h_e$.
 - a) À quelle condition sur h pourrez-vous utiliser le même dispositif en remplissant l'éprouvette jusqu'à une hauteur h_e identique à l'éprouvette précédente? Application numérique.
 - b) Si ce n'est pas le cas, jusqu'à quelle valeur de h pouvez-vous régler le problème en jouant sur x_A et α (on suppose que la bille décolle toujours du plan incliné au point O, que le point A est au centre de l'éprouvette et qu'on a toujours $v_A = 1,0 \text{ m.s}^{-1}$)? Application numérique.

II. Oscillateur

Ce problème se consacre à l'étude énergétique d'un oscillateur, représenté sur la figure ci-après.

Un fil **ABC**, contenu dans un plan vertical, est constitué de deux demi-cercles de rayon $R = 10 \text{ cm}$: **AB** concave de centre O_1 , et **BC** convexe de centre O_2 . Un petit anneau assimilé à un point matériel (M, m) , avec $m = 10 \text{ g}$, coulisse sans frottement sur le fil, tout en étant attaché à un ressort idéal de raideur k et de longueur à vide nulle, enroulé autour du fil, et dont l'autre extrémité est fixée en **A**. En **A** et en **C** se trouvent des butées ; on ne s'intéressera pas à ce qui se produit après que l'anneau est entré en contact avec une de ces butées. Le point **B** est purement mathématique.

L'ensemble est plongé dans le champ de pesanteur uniforme d'intensité $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ et $\vec{g} = -g \vec{u}_z$.

Comme représenté sur la figure, on repère la position de l'anneau :

- sur le demi-cercle **AB**, par la base polaire $\mathcal{B}_1 = (O_1, \vec{u}_{r1}, \vec{u}_{\theta1})$
- sur le demi-cercle **BC**, par la base polaire $\mathcal{B}_2 = (O_2, \vec{u}_{r2}, \vec{u}_{\theta2})$

On n'introduira aucune autre variable spatiale que celles définies dans cet énoncé.

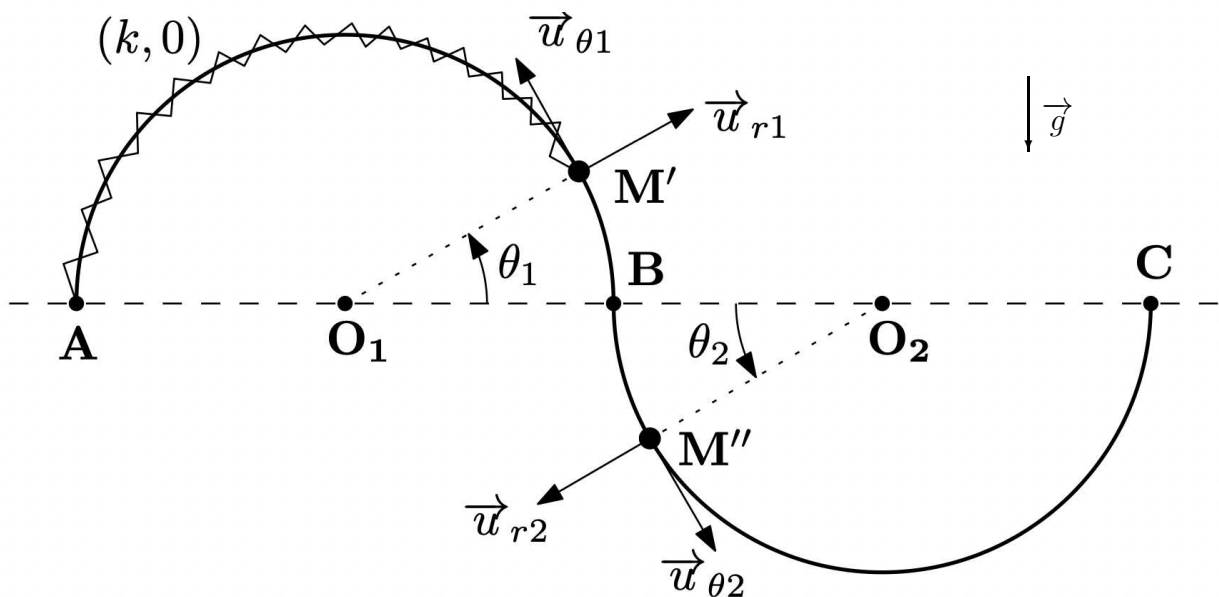


FIGURE 2 – Schéma de l'oscillateur étudié. Deux positions différentes M' et M'' de l'anneau (M, m) ont été représentées pour définir les bases polaires ; le ressort n'est pas figuré pour la seconde position

II.1 Cas où l'anneau est sur le demi-cercle AB

1. Faire le bilan des forces s'appliquant sur l'anneau. On exprimera chacune des forces dans la base $\mathcal{B}_1$.
2. D'après vos connaissances, indiquer parmi ces forces, celles qui sont conservatives et, le cas échéant, donner l'expression de l'énergie potentielle associée. En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale $E_p(\theta_1)$ du point M en fonction de k, m, g, θ_1 et R . On prendra l'origine de E_p en A.
3. L'énergie mécanique totale du système est-elle conservée ?
4. On introduit ℓ la longueur du ressort. Donner l'expression de θ_1 en fonction de R et ℓ .
5. En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale $E_p(\ell)$ de M en fonction de k, m, g, ℓ et R .

II.2 Cas où l'anneau est sur le demi-cercle BC

6. Exprimer chacune des forces s'exerçant sur l'anneau dans la base $\mathcal{B}_2$.
7. Donner l'expression de l'énergie potentielle associée à chacune des forces conservatives. En déduire l'énergie potentielle totale $E_p(\theta_2)$ en fonction de k, m, g, θ_2 et R (on utilisera la continuité de E_p en B).
8. Donner l'expression de θ_2 en fonction de ℓ et R .
9. En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale $E_p(\ell)$ du point M en fonction de k, m, g, ℓ et R . Comparer à l'expression trouvée à la question 5.

II.3 Étude énergétique du problème complet

On traite à présent l'ensemble des deux demi-cercles. L'unique variable ℓ permet de repérer de façon univoque la position du point **M** sur le dispositif.

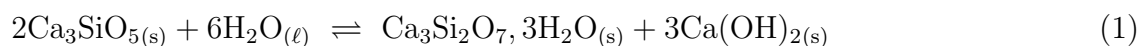
10. Déterminer l'équation vérifiée par la ou les éventuelle(s) position(s) d'équilibre ℓ_e du point **M**.
11. Cette équation n'est pas soluble algébriquement, on va donc la résoudre graphiquement. La réécrire comme l'égalité d'une fonction trigonométrique et d'une fonction linéaire, cette dernière ne dépendant que de k et ℓ . En traçant sur un même graphe chacune de ces deux fonctions en fonction de ℓ , montrer graphiquement que selon la valeur de k , on a 0, 1 ou 2 position(s) d'équilibre.
12. Dans le cas (limite) où on n'en a qu'une seule, estimer graphiquement la valeur numérique $\ell_{e,\text{lim}}$ de ℓ_e et la valeur k_{lim} de k correspondante. Sur quel demi-cercle se trouve cette position d'équilibre ?
13. On choisit à présent $k = 0,20 \text{ N.m}^{-1}$. D'après les questions précédentes, prévoir le nombre de position(s) d'équilibre, et sa (leur) position(s) par rapport à **B**.
14. Le graphe en annexe (**à rendre avec la copie**) présente la courbe $E_p(\ell)$ pour cette valeur de k . Y placer les points A, B et C, puis retrouver le résultat de la réponse précédente, et déterminer (le cas échéant) la stabilité de la (des) éventuelle(s) position(s) d'équilibre.
15. On lâche sans vitesse initiale, depuis une position ℓ_0 , l'anneau **M**. En raisonnant d'après le graphique de la figure en annexe, décrire le mouvement en fonction de la valeur de ℓ_0 . On fera apparaître des éléments de raisonnement sur le graphique.
16. On cherche à linéariser l'oscillateur au voisinage d'une position d'équilibre stable.
 - a) Écrire l'expression de l'énergie totale E_m de M en fonction de $m, \ell, \dot{\ell}, g, R$ et k .
 - b) En déduire l'équation différentielle du mouvement (équation différentielle non linéaire en ℓ).
 - c) On choisit la position initiale de l'anneau ℓ_0 telle que $\ell_0 = 40 \text{ cm}$. En notant $L = \ell - \ell_{e2}$, où ℓ_{e2} est la position d'équilibre la plus proche de ℓ_0 , et en remarquant que l'on aura toujours $\frac{L}{R} \ll 1$, déterminer l'équation différentielle linéaire satisfaite par L .
On donne les développements limités utiles ici : $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\simeq} 1$ et $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\simeq} x$.
 - d) Sans résoudre cette dernière équation, décrire le mouvement observé (nature, amplitude, période). On effectuera les applications numériques.

III. Le béton (d'après Mines-Ponts MP 2016)

Ce problème s'intéresse à l'étude de quelques propriétés physico-chimiques du ciment et des bétons armés. Le clinker est le principal constituant d'un ciment, il est obtenu à partir d'un mélange de 80% de calcaire ($\text{CaCO}_{3(s)}$) et de 20% d'argile (silicoaluminates). Le ciment est principalement utilisé pour fabriquer le béton qui est un mélange de ciment, sable, granulats et eau. Le béton forme après la « prise » une véritable roche artificielle. La « prise » est le phénomène de durcissement en présence d'eau.

III.1 Prise d'un béton

Le ciment est modélisé par la seule espèce $\text{Ca}_3\text{SiO}_{5(s)}$. La réaction à l'origine de la « prise » est volontairement simplifiée sous la forme suivante :



On mélange rapidement $m_1 = 228$ g de ciment et $m_2 = 90$ g d'eau liquide.

1. En supposant la réaction totale, indiquer quel est le réactif limitant et calculer les quantités de matière en chacune des espèces présentes en fin d'évolution.

III.2 Basicité d'un béton

L'hydroxyde de calcium $\text{Ca}(\text{OH})_{2(s)}$ confère à l'eau qui se trouve dans les pores du béton (solution interstitielle) un caractère fortement basique. On étudie une solution aqueuse recueillie à la surface du béton après la prise, modélisée par une solution contenant des ions Ca^{2+} et HO^- (compte tenu de la solubilité de l'hydroxyde de calcium). Le volume prélevé est égal à $V_0 = 100,0$ mL, il est titré par une solution d'acide chlorhydrique concentré (H_3O^+ , Cl^-) de concentration $c = 0,50$ mol.L $^{-1}$. Le titrage est suivi par conductimétrie (mesure de la conductivité σ) de la solution titrée en fonction du volume V de titrant ajouté. Le résultat expérimental est présenté ci-après.

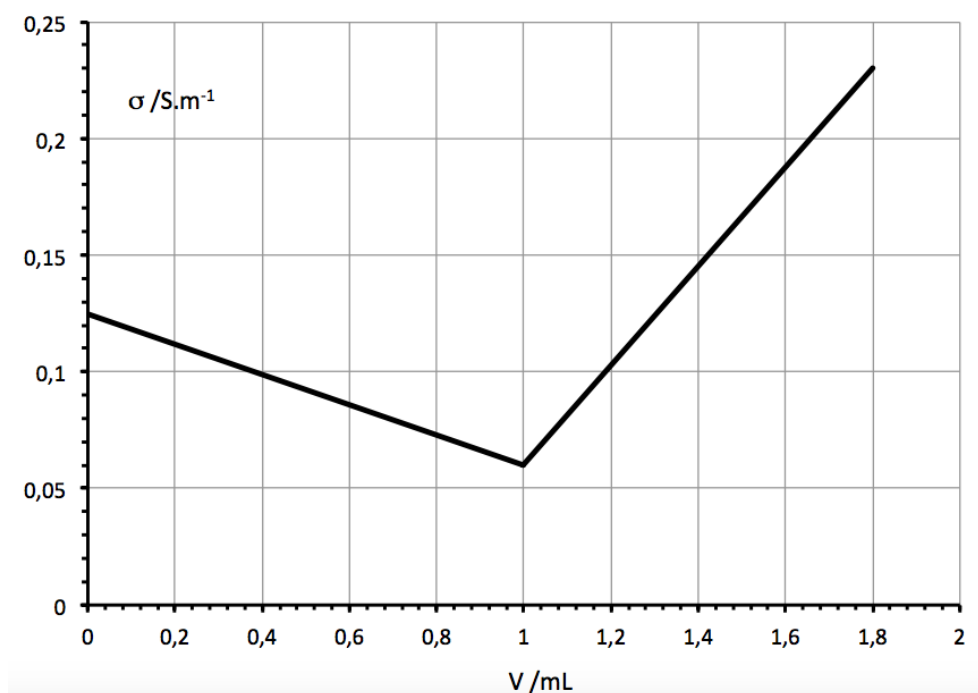


FIGURE 3 – Titrage conductimétrique

2. Écrire la réaction de titrage et indiquer la valeur de sa constante d'équilibre à 298 K.
3. Quel est le pH de la solution prélevée à la surface du béton ?
4. Justifier qualitativement (sans calcul) mais de façon détaillée l'allure de la courbe conductimétrique $\sigma = f(V)$ obtenue.
5. Calculer grâce aux données le rapport des pentes des deux droites et vérifier le résultat à l'aide du graphique.
6. Dessiner l'allure de la courbe qui aurait été obtenue à l'occasion d'un suivi pH-métrique, préciser la valeur du pH au point équivalent.

III.3 Carbonatation d'un béton

Le dioxyde de carbone présent dans l'atmosphère peut se dissoudre en solution aqueuse. Dans le cas des solutions basiques il se dissout sous forme d'ions carbonate CO_3^{2-} . Lorsque le phénomène se produit sur un béton, les ions carbonate issus du dioxyde de carbone peuvent remplacer les ions HO^- de l'hydroxyde de calcium (formation de $\text{CaCO}_{3(s)}$). On parle alors de carbonatation d'un béton, conduisant à une fragilisation de sa structure. On étudie dans cette partie le carbonate de calcium (de type calcite).

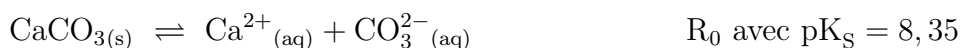
7. Rappeler le nom des règles générales permettant d'établir la configuration électronique d'un atome dans l'état fondamental et les appliquer à l'atome de calcium. Pourquoi le calcium forme-t-il des ions Ca^{2+} de façon privilégiée ?
8. Établir, en justifiant rapidement, le diagramme de prédominance des espèces en solution du carbone : $\text{H}_2\text{CO}_{3(aq)}$; $\text{HCO}_3^-(aq)$; $\text{CO}_3^{2-}(aq)$. Justifier que dans le cas du béton, le dioxyde du carbone dissous en surface se trouve bien sous la forme de carbonate.
9. À l'aide des données, montrer alors que la carbonatation du béton est thermodynamiquement favorisée.
10. Donner un schéma de Lewis de l'ion carbonate. Cet ion possède-t-il un moment dipolaire permanent ? Justifier.

DONNÉES :

- ★ Numéros atomiques : 6 (C) ; 8 (O) ; 20 (Ca) ;
- ★ Masses molaires : Ca : 40 g.mol⁻¹ ; Fe : 55 g.mol⁻¹ ; Si : 28 g.mol⁻¹ ;
- ★ Conductivités ioniques molaires (en mS.m².mol⁻¹) : $\lambda^0(\text{H}_3\text{O}_{(aq)}^+) = 35,0$, $\lambda^0(\text{Cl}_{(aq)}^-) = 7,6$ et $\lambda^0(\text{HO}_{(aq)}^-) = 19,8$;
- ★ Constantes d'acidité : $\text{pK}_{a1}(\text{CO}_2, \text{H}_2\text{O}/\text{HCO}_3^-) = 6,4$; $\text{pK}_{a2}(\text{HCO}_3^-/\text{CO}_3^{2-}) = 10,4$;
- ★ Produit de solubilité : $K_s(\text{CaCO}_3) = 3.10^{-9}$, $K_s(\text{Ca}(\text{OH})_2) = 5.10^{-6}$.

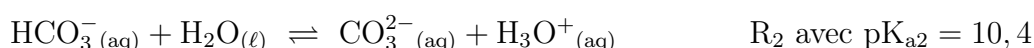
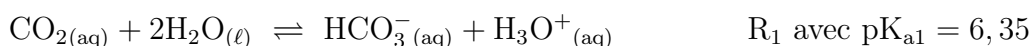
IV. Dissolution du carbonate de calcium dans l'eau (d'après E3A MP 2014)

Considérons l'équilibre de dissolution de CaCO_3 dans un volume V d'eau, à la température T et sous la pression $P^0 = 1 \text{ bar}$:



1. Rappeler la définition d'un produit de solubilité et exprimer celui de CaCO_3 , noté K_S . (La concentration standard est notée $c^0 = 1,00 \text{ mol.L}^{-1}$)

Examinons les équilibres suivants :



Le dioxyde de carbone, à saturation, a une concentration maximale dans l'eau qui s'élève à C_{max} , avec $C_{\text{max}} = 34,0 \text{ mmol.L}^{-1}$. Les concentrations étant faibles, les activités des ions en solution sont assimilées à leurs concentrations molaires.

La solubilité S de CaCO_3 représente la quantité maximale de ce solide pouvant se dissoudre dans un volume V unitaire et à la température T ; elle s'écrit :

$$S = [\text{Ca}^{2+}] = [\text{CO}_{2(aq)}] + [\text{HCO}_3^{-}_{(aq)}] + [\text{CO}_3^{2-}_{(aq)}]$$

2. Exprimer les constantes d'acidité $K_{a1}(\text{CO}_{2(aq)}/\text{HCO}_3^{-}_{(aq)})$ et $K_{a2}(\text{HCO}_3^{-}_{(aq)}/\text{CO}_3^{2-}_{(aq)})$ en fonction des diverses concentrations.
3. Montrer que la solubilité S de CaCO_3 vérifie la relation suivante :

$$S^2 = [\text{Ca}^{2+}]^2 = A \times \left[\frac{[\text{H}_3\text{O}^+]^2}{B} + \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C} + 1 \right]$$

Expliciter les coefficients A , B et C en fonction des constantes K_{a1} , K_{a2} , K_S et de c^0 , la concentration standard.

4. Tracer le diagramme de prédominance des espèces CO_2 , HCO_3^{-} et CO_3^{2-} , à 298 K, en fonction du pH de la solution.
5. Déterminer, dans le domaine de prédominance des ions carbonate (où la solubilité sera notée S_3 et $pS_3 = -\log\left(\frac{S_3}{c^0}\right)$) la loi de variation de pS_3 en fonction du pH (effectuer, si nécessaire, les simplifications utiles).
6. Reprendre le même type d'étude dans le domaine de prédominance des ions hydrogénocarbonate (solubilité notée S_2 et $pS_2 = -\log\left(\frac{S_2}{c^0}\right)$), puis dans celui du dioxyde de carbone (solubilité notée S_1 et $pS_1 = -\log\left(\frac{S_1}{c^0}\right)$).
7. Montrer que la solubilité de CaCO_3 possède une valeur limite supérieure S_{lim} (à cause de la saturation de CO_2 dans l'eau). Calculer pS_{lim} , la valeur limite correspondante de pS et en déduire la valeur du pH de la solution lorsque cette solubilité limite est atteinte.
8. Représenter, sur la figure du document-réponse, chacune des fonctions pS_3 , pS_2 et pS_1 en fonction du pH, puis tracer, de façon continue, la solubilité pS de CaCO_3 , à 298 K.

9. À l'aide de ce tracé, préciser pour quel domaine de pH la solubilité du carbonate de calcium est la meilleure.
10. Proposer le domaine optimal de pH pour une eau domestique, sachant qu'elle ne doit pas être trop agressive (trop riche en CO_2), ni favoriser la précipitation de CaCO_3 .

Une eau trop incrustante est le siège de précipitation du carbonate de calcium, avec comme inconvénients des dépôts dans les réseaux de distribution, chaudières ou machines à laver, entraînant des pertes énergétiques. Il y a donc lieu de contrôler sa teneur en CaCO_3 .

Détermination du titre alcalimétrique d'une eau (TA)

Le TA détermine la teneur en carbonate d'une eau ; il correspond au volume d'acide (exprimé en mL) de concentration $20,0 \text{ mmol.L}^{-1}$ en ion $\text{H}_3\text{O}^+_{(\text{aq})}$, nécessaire pour doser 100 mL d'eau en présence d'un indicateur coloré et ce titre s'exprime en degré français : °F.

Dosons une prise d'essai de 50,0 mL d'eau (à $\text{pH} = 8,3$) par une solution d'HCl de concentration $20,0 \text{ mmol.L}^{-1}$, en présence de phénolphthaléine ; le volume versé à l'équivalence est de 17,5 mL.

11. Écrire l'équation de réaction du dosage. Calculer sa constante d'équilibre et conclure.
12. Déterminer en °F le TA de cette eau.

NOM :

Prénom :

Classe :

ANNEXE DE L'EXERCICE « OSCILLATEUR », À RENDRE AVEC LA COPIE

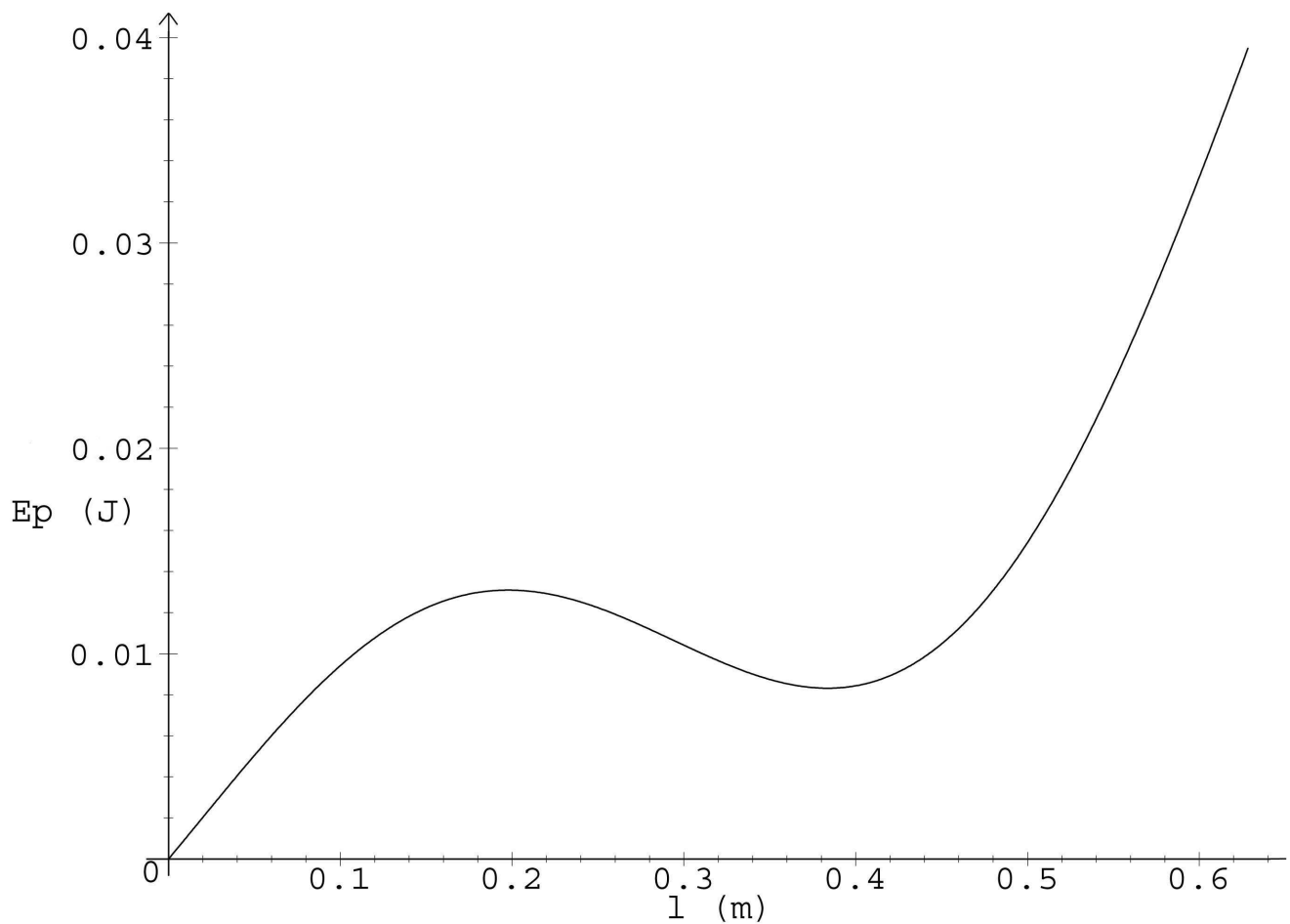


FIGURE 4 – Graphe de $E_p(l)$ pour $k = 0,20 \text{ N.m}^{-1}$

Document-réponse de l'exercice « Dissolution du carbonate de calcium dans l'eau », à compléter et à rendre avec la copie

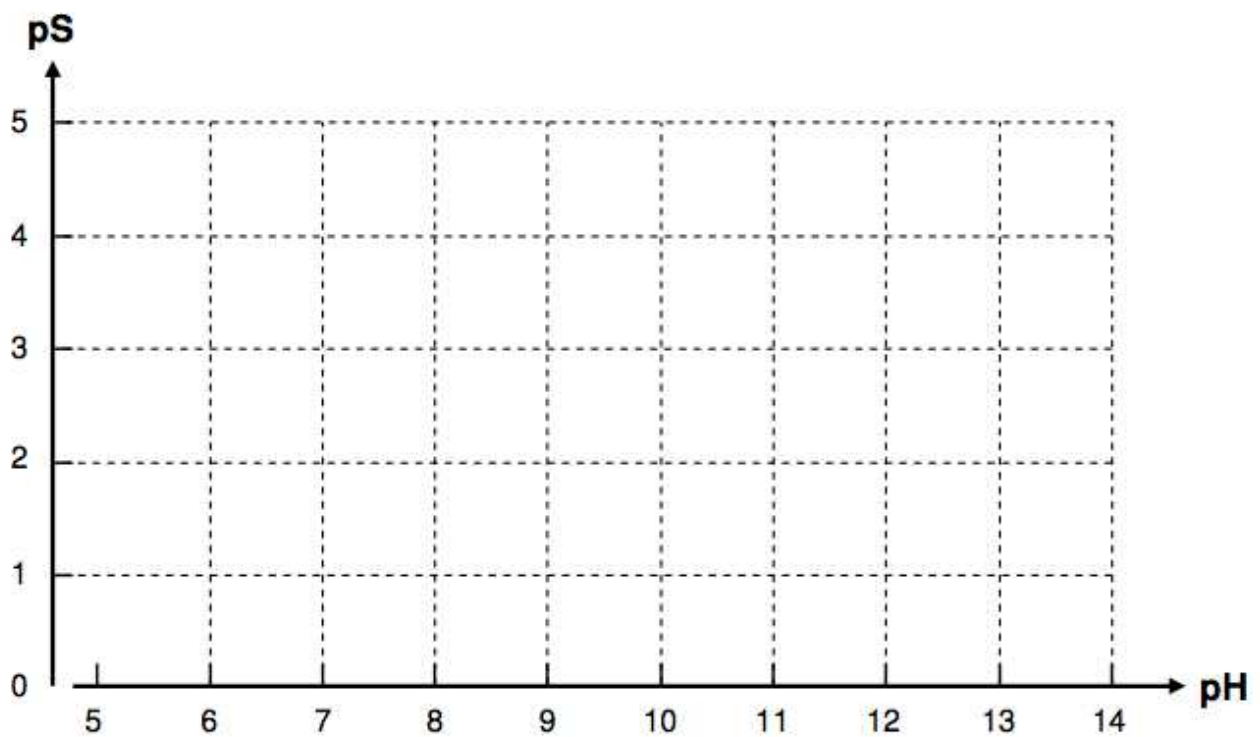


FIGURE 5 – Évolution de pS en fonction du pH