Électricité, oscillateur harmonique et un peu de chimie

Jeudi 14 novembre 2024 - Durée 2h50

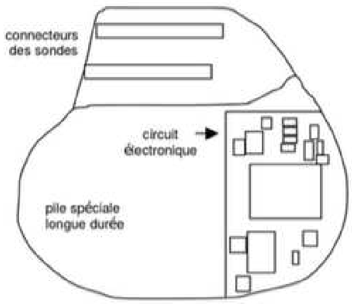
- ⋆ **La calculatrice est autorisée.**
- ⋆ **Le téléphone portable est interdit.**
- ⋆ **Il sera tenu le plus grand compte du soin, de la présentation, et de la rédaction.**
- ⋆ **Chaque réponse doit être justifiée.**
- ⋆ **Par ailleurs, même lorsque ce n'est pas explicitement demandé, toute application numérique doit être précédée d'une expression littérale en fonction des données de l'énoncé.**

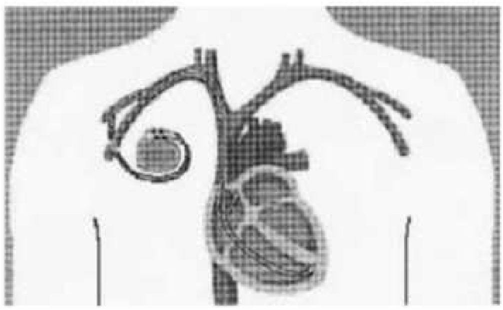
I. Génération d'impulsions : le stimulateur cardiaque

Notre cœur se contracte plus de 100 000 fois par jour. Il bat 24h sur 24 pendant toute notre vie, entre 60 et 80 fois par minute, grâce à un stimulateur naturel : le nœud sinusal.

Lorsque celui-ci ne remplit plus correctement son rôle, la chirurgie permet aujourd'hui d'implanter dans la cage thoracique un stimulateur cardiaque artificiel (appelé aussi pacemaker) qui va forcer le muscle cardiaque à battre régulièrement en lui envoyant de petites impulsions électriques par l'intermédiaire de sondes.

Le boîtier de celui-ci est de petite taille : 5 cm de large et 6 mm d'épaisseur. Sa masse est d'environ 30 g.



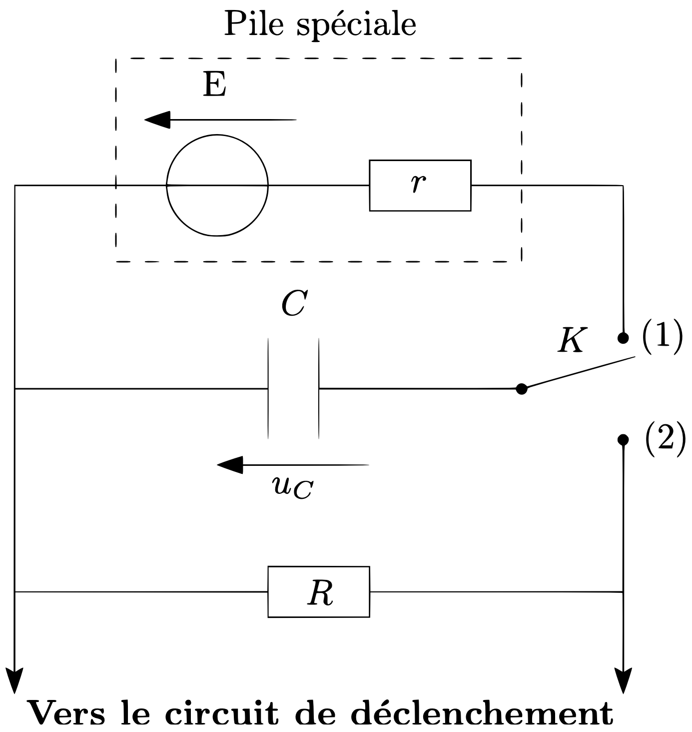


Ce pacemaker est en fait un générateur d'impulsions ; il peut être modélisé par le circuit électrique en dérivation représenté sur figure ci-après, qui comprend un condensateur de capacité $\mathrm{C} = 470$ nF, un résistor de résistance R, une pile spéciale et un transistor qui joue le rôle d'interrupteur, K.

La pile qui apparaît dans ce dispositif peut être modélisée par l'association en série d'un résistor de résistance r (ici très faible voire négligeable) et d'un générateur de tension idéal de force électromotrice $\mathrm{E} = 5,5$ V.

Quand l'interrupteur est en position (1) le condensateur se charge de façon quasi-instantanée. Puis, quand l'interrupteur bascule en position (2), le condensateur se décharge lentement à travers le résistor de résistance $\mathrm{R} = 1,7\ \mathrm{M}\Omega$, jusqu'à une valeur limite $u_{\lim} = \dfrac{\mathrm{E}}{e}$ (où e est le nombre tel que $\ln(e) = 1$). À cet instant, le circuit de déclenchement envoie une impulsion électrique vers les sondes qui la transmettent au cœur : on obtient alors un battement !

Cette dernière opération terminée, l'interrupteur bascule à nouveau en position (1) et le condensateur se charge, etc.



I.1 Charge du condensateur

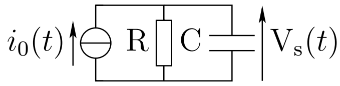
1. Quand l'interrupteur est en position (1), le condensateur se charge de façon quasi instantanée. Sans faire de calcul, expliquer pourquoi ce phénomène est très rapide.
2. Sans établir d'équation différentielle, déterminer la valeur de u_C lorsque le condensateur est chargé.

I.2 Décharge du condensateur

3. On note $t = 0$ la date du premier basculement de l'interrupteur K qu'on étudie (le condensateur étant chargé). Déterminer $u_C(0^+)$, et également ce que vaudrait la tension u_C au bout d'une très longue durée si l'interrupteur K ne rebasculait pas et en l'absence du circuit de déclenchement (on notera $u_C(\infty)$ cette quantité).
4. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ lors de la phase de décharge. Faire apparaître une durée τ dont on donnera l'expression et la valeur.
5. Résoudre l'équation différentielle.
6. En déduire la date t_1 à laquelle l'interrupteur va basculer.
7. Déterminer littéralement le nombre N de battements de cœur par unité de temps, puis numériquement en choisissant la minute comme unité de temps. Commenter le résultat obtenu.
8. Que se passe-t-il lorsque la pile commence à se décharger ?

II. Détecteur de particules

Un dispositif destiné à détecter des particules ionisantes se comporte, sous l'effet de l'une de ces particules, comme un générateur idéal de courant dont le courant électromoteur est $i_0(t) = \mathrm{I}_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Ce dispositif est connecté à un circuit RC dont la constante de temps $\mathrm{RC} = k\,\tau$ où k est une constante réelle positive.



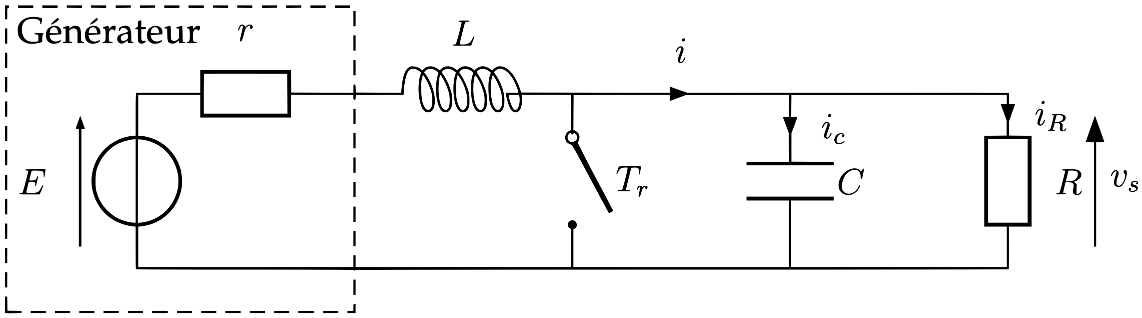
1. Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de $\mathrm{V_s}(t)$.
2. Si le condensateur est initialement déchargé, montrer que $\mathrm{V_s}(t)$ est donnée par

$$\mathrm{V_s}(t) = \mathrm{A\,R\,I_0}\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - \mathrm{e}^{-t/(k\tau)}\right)$$

   Donner A en fonction de k.
3. La solution précédente n'est pas valable pour $k = 1$. Pour tout de même trouver une fonction solution dans ce cas, on va se placer proche de cette valeur en posant $k = 1 - \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$ et approximer l'expression précédente. On rappelle que, pour $\varepsilon \ll 1$, $(1+\varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$ et $\mathrm{e}^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon$.
   a) Développer l'expression de $\mathrm{V_s}$ au premier ordre non nul en ε.
   b) Donner alors la solution pressentie pour $k = 1$ et vérifier qu'elle est bien solution de l'équation différentielle.
4. Pour $k = 1$, $\mathrm{V_s}(t)$ passe par un maximum pour $t = t_0$. Exprimer t_0 et $\mathrm{V_s}(t_0)$ en fonction des données.

III. Circuit du second ordre

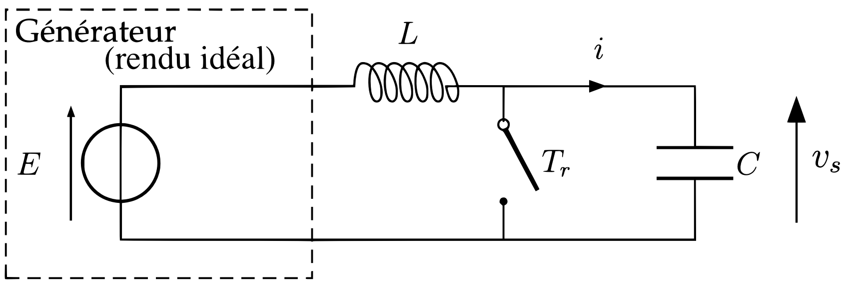
On considère le circuit de la figure ci-dessous, dans lequel l'interrupteur T_r est fermé depuis un temps suffisamment long pour que le régime permanent soit établi.



La résistance r et le générateur E représentent la modélisation de Thévenin d'un générateur de tension réel. On s'intéresse au régime transitoire qui suit l'ouverture de l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

1. Étude de la tension v_s.
   a) Établir l'équation différentielle concernant v_s sous sa forme canonique, après l'ouverture de l'interrupteur.
   b) Déterminer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q en fonction de r, R, L et C.
2. Déterminer numériquement ω_0 et Q à partir des valeurs numériques suivantes : $E = 15$ V, $r = 5\ \Omega$, $L = 0,1$ H, $C = 1000\ \mu$F et $R = 200\ \Omega$.
   À quel type de régime a-t-on affaire ?
3. On recherche ensuite les conditions initiales pour v_s. Déterminer $v_s(0^+)$ et $\dfrac{dv_s}{dt}(0^+)$.
4. Résolution de l'équation différentielle.
   a) Justifier que l'on peut chercher des solutions $v_s(t)$ de l'équation différentielle sous la forme :
   $$v_s(t) = A - Be^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi)$$
   b) Expliciter ensuite dans cet ordre : A (en fonction de E, r et R), α et ω (en fonction de ω_0 et Q), puis B (en fonction de A, E, r, C, α et ω) et ϕ (en fonction de A, E, r, C, α, B et ω).
5. Représenter l'allure de $v_s(t)$.

Le régime permanent étant atteint, on réinitialise le temps. On considère qu'à $t = 0$, on déconnecte la résistance R et on rend le générateur de tension idéal. Le circuit étudié est le suivant :



6. Déterminer la nouvelle équation différentielle dont v_s est solution. De quelle équation s'agit-il ?
7. Déterminer $v_s(0^+)$ ainsi que $\dfrac{dv_s}{dt}(0^+)$.
8. En déduire $v_s(t)$ en fonction de E, r, R, L, C et t.

IV. Flash lumineux

La combustion d'un ruban de magnésium a permis aux premiers photographes de réaliser des flashs lumineux leur permettant d'éclairer, avec une lumière très intense, la scène à immortaliser.

On souhaite reproduire dans un flacon la combustion d'un ruban de magnésium, selon la réaction (R) d'équation :

$$\mathrm{Mg_{(s)}} + \frac{1}{2}\mathrm{O_{2(g)}} \leftrightarrows \mathrm{MgO_{(s)}}$$

Pour cela :

- ⋆ On introduit un ruban de magnésium de masse $m_0 = 0,20$ g dans un flacon de volume $\mathrm{V} = 1,00$ L contenant de l'air initialement sous $\mathrm{P_i} = 1,00$ bar à $\mathrm{T} = 298$ K. On considérera que l'air possède initialement des fractions molaires $x_{\mathrm{O_2}} = 0,20$ et $x_{\mathrm{N_2}} = 0,80$. On ferme hermétiquement le flacon.
- ⋆ La réaction de combustion est amorcée. Elle se produit quasi instantanément, avec émission d'un flash lumineux, puis le système revient à sa température initiale.

1. En cherchant dans une table de données thermodynamiques, on ne trouve pas la valeur de la constante d'équilibre de la réaction de combustion ci-dessus. En revanche, on trouve celle des réactions suivantes :

   (R₁) $$\mathrm{Mg_{(s)}} + 2\mathrm{H^+_{(aq)}} \leftrightarrows \mathrm{Mg^{2+}_{(aq)}} + \mathrm{H_{2(g)}} \qquad \mathrm{K_1^0} = 1,0.10^{+80}$$

   (R₂) $$\mathrm{MgO_{(s)}} + 2\mathrm{H^+_{(aq)}} \leftrightarrows \mathrm{Mg^{2+}_{(aq)}} + \mathrm{H_2O_{(\ell)}} \qquad \mathrm{K_2^0} = 4,9.10^{+21}$$

   (R₃) $$\mathrm{H_{2(g)}} + \frac{1}{2}\mathrm{O_{2(g)}} \leftrightarrows \mathrm{H_2O_{(\ell)}} \qquad \mathrm{K_3^0} = 4,1.10^{+41}$$

   En déduire la valeur de la constante d'équilibre $\mathrm{K^0}$ de la réaction de combustion (R).
2. Déterminer les quantités de matière initiales $n_{\mathrm{Mg},0}$, $n_{\mathrm{O_2},0}$ et $n_{\mathrm{N_2},0}$. Que peut-on dire de la quantité de matière en diazote ?
3. Déterminer l'état final de la combustion : présence ou non du magnésium, quantité de matière en oxyde de magnésium, pression dans le flacon et composition du gaz (en fractions molaires).

Données :

- ⋆ $\mathrm{O_{2(g)}}$ et $\mathrm{N_{2(g)}}$ sont considérés comme des gaz parfaits ;
- ⋆ Constante d'état des gaz parfaits : $\mathrm{R} = 8,314$ SI ;
- ⋆ $\mathrm{M_{Mg}} = 24,3$ g.mol^{-1}.

♫