Électricité, oscillateur harmonique et un peu de chimie

I. Génération d'impulsions : le stimulateur cardiaque

I.1 La durée caractéristique du régime transitoire d'un circuit rC série est $t = 5\tau = 5r\mathrm{C}$. Or, la résistance r est très faible, de sorte que le régime transitoire est extrêmement bref.

I.2 En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

On en déduit directement $\boxed{u_\mathrm{c} = \mathrm{E}}$

I.3 La tension aux bornes d'un condensateur ne peut subir de discontinuité donc, d'après la question précédente :

$$\boxed{u_\mathrm{c}(0^+) = u_\mathrm{c}(0^-) = \mathrm{E}}$$

En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Or, u_c est aussi la tension aux bornes de la résistance R.

On en déduit $\boxed{u_\mathrm{c}(\infty) = 0}$

I.4 L'équation différentielle vérifiée par u_c est

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \frac{u_\mathrm{c}}{\tau} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \tau = \mathrm{RC} = 8,0.10^{-1}\ \mathrm{s}}$$

I.5 u_c s'écrit

$$u_\mathrm{c}(t) = \mathrm{A}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \underbrace{u_\mathrm{cSP}}_{0}$$

$$u_\mathrm{c}(0^+) = \mathrm{A} = \mathrm{E} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\forall t > 0 \quad u_\mathrm{c}(t) = \mathrm{E}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

I.6 D'après l'énoncé $\quad u_\mathrm{c}(t_1) = u_\mathrm{lim} = \dfrac{\mathrm{E}}{e} \quad$ avec $\quad u_\mathrm{c}(t_1) = \mathrm{E}\exp\left(-\dfrac{t_1}{\tau}\right)$

On en déduit $\boxed{t_1 = \tau = \mathrm{RC}}$

Application numérique : $\boxed{t_1 = 8,0.10^{-1}\ \mathrm{s}}$

I.7 Un battement de cœur a lieu tous les τ, de sorte que

$$\boxed{\mathrm{N} = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\mathrm{RC}}}$$

Application numérique : $\boxed{\mathrm{N} \approx 75\ \mathrm{batt/min}}$

On obtient bien une fréquence de battement comprise entre 60 et 80 battements par minute, comme pour un cœur sain.

I.8 La décharge de la pile a deux effets :

- ⋆ E diminue, de sorte que la charge raccourcit légèrement, et surtout la décharge est moins longue car u_lim est plus tôt atteinte ;
- ⋆ r augmente, de sorte que la charge est un peu plus longue.

Au final, les effets sur la charge ne sont sans doute pas sensibles. En revanche, la plus faible durée de la charge diminue la période de $u_\mathrm{c}(t)$, de sorte que la fréquence cardiaque va augmenter.

II. Détecteur de particules

II.1 La loi des nœuds donne
$$i_0(t) = \frac{\mathrm{V_s}}{\mathrm{R}} + \mathrm{C}\,\frac{\mathrm{dV_s}}{\mathrm{d}t}$$

d'où
$$\boxed{\frac{\mathrm{dV_s}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\mathrm{RC}}\,\mathrm{V_s} = \frac{\mathrm{I_0}}{\mathrm{C}}\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

II.2 Avec l'expression fournie, $\displaystyle \frac{\mathrm{dV_s}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{ARI_0}}{\tau}\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - \frac{1}{k}\,\mathrm{e}^{-t/(k\tau)}\right)$

En remplaçant dans l'équation différentielle précédente et en utilisant $\mathrm{RC} = k\tau$ comme défini dans l'énoncé, on obtient
$$\frac{\mathrm{dV_s}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{k\tau}\,\mathrm{V_s} = -\frac{\mathrm{ARI_0}}{\tau}\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - \frac{1}{k}\,\mathrm{e}^{-t/(k\tau)}\right) + \frac{\mathrm{ARI_0}}{k\,\tau}\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - \mathrm{e}^{-t/(k\tau)}\right) = \frac{\mathrm{AI_0}\,(1-k)}{\mathrm{C}}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

En identifiant
$$\boxed{\mathrm{A} = \frac{1}{1-k}}$$

II.3 Recherche d'une solution pour $k = 1$

II.3.a En posant $k = 1 - \varepsilon$, on obtient
$$\mathrm{V_s} = \frac{\mathrm{RI_0}}{\varepsilon}\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - \mathrm{e}^{-t/(1-\varepsilon)\tau}\right) \approx \frac{\mathrm{RI_0}}{\varepsilon}\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - \mathrm{e}^{-(1+\varepsilon)t/\tau}\right) = \frac{\mathrm{RI_0}}{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(1 - \mathrm{e}^{-\varepsilon t/\tau}\right) \approx \frac{\mathrm{RI_0}}{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\frac{\varepsilon\,t}{\tau}$$

d'où
$$\boxed{\mathrm{V_s} \approx \mathrm{RI_0}\,\frac{t}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

II.3.b Voyons si l'expression déterminée pour $\mathrm{V_s}$ est bien la solution pour $k = 1$, en calculant
$$\frac{\mathrm{dV_s}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{RI_0}}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

d'où
$$\frac{\mathrm{dV_s}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,\mathrm{V_s} = \frac{\mathrm{RI_0}}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = \frac{\mathrm{I_0}}{\mathrm{C}}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$\boxed{\mathrm{V_s} : t \mapsto \mathrm{RI_0}\,\frac{t}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \text{ est bien la solution de l'équation différentielle pour } k = 1.}$$

II.4 Le calcul précédent de la dérivée permet de dire que $\mathrm{V_s}$ passe par un maximum pour $t = \tau$, d'où
$$\boxed{t_0 = \tau \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V_s}(t_0) = \mathrm{RI_0}\,\mathrm{e}^{-1}}$$

III. Circuit du second ordre

III.1 Étude de la tension v_s.

III.1.a On applique la loi des mailles en remarquant que les deux dipôles à droite sont soumis à la même tension v_s. On veut tout exprimer en fonction de v_s.

Équations d'évolution : $\quad i_c = C\dfrac{dv_s}{dt} \quad$ et $\quad i_R = \dfrac{v_s}{R}$

Loi des nœuds : $\quad i = i_c + i_R = C\dfrac{dv_s}{dt} + \dfrac{v_s}{R}$

Loi des mailles $\quad E = ri + L\dfrac{di}{dt} + v_s$

On réutilise la loi des nœuds pour éliminer i :

$$E = r\left(C\frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{R}\right) + L\frac{d}{dt}\left(C\frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{R}\right) + v_s$$

On regroupe alors les termes de même dérivée :

$$LC\frac{d^2v_s}{dt^2} + \left(\frac{L}{R} + rC\right)\frac{dv_s}{dt} + \left(\frac{r}{R} + 1\right)v_s = E$$

Finalement : $$\frac{d^2v_s}{dt^2} + \frac{L/R + rC}{LC}\frac{dv_s}{dt} + \frac{1 + r/R}{LC}v_s = \frac{E}{LC}$$

III.1.b On peut proposer la forme canonique associée :

$$\frac{d^2v_s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = \frac{E}{LC}$$

Par identification, on en déduit :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{\sqrt{1 + \dfrac{r}{R}}}{\sqrt{LC}} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{\sqrt{1 + \dfrac{r}{R}}\sqrt{LC}}{rC + \dfrac{L}{R}}}$$

III.2 *Applications numériques* :

$$\boxed{\omega_0 = 101,2\ \text{rad.s}^{-1} \qquad \text{et} \qquad Q = 1,84 > \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{Q > \frac{1}{2} \text{ : on est en présence d'un régime pseudo-périodique.}}$$

III.3 ⋆ L'interrupteur est fermé pour $t < 0$ donc la tension aux bornes du condensateur est nulle à 0^-. On a par continuité de la tension aux bornes du condensateur :

$$\boxed{v_s(0^+) = v_s(0^-) = 0}$$

⋆ Comme $i_c = C\dfrac{dv_s}{dt}$, rechercher $\dfrac{dv_s}{dt}(0^+)$ revient à s'intéresser à $i(0^+)$.

Or $\quad i(0^+) = i_c(0^+) + i_R(0^+) \quad$ et $\quad i_R(0^+) = v_s(0^+)/R = 0$

La présence de la bobine dans la maille principale indique que $i(0^+) = i(0^-)$. Cette dernière quantité peut alors être simplement exprimée à l'aide d'une loi des mailles exprimée à $t = 0^-$ (donc en régime permanent lorsque $u_L = 0$) :

$$E = ri(0^-) + \underbrace{v_s(0^-)}_{=0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad i(0^-) = \frac{E}{r}$$

d'où $$\boxed{\frac{dv_s}{dt}(0^+) = \frac{E}{rC}}$$

III.4 Résolution de l'équation différentielle.

III.4.a On obtient donc une solution du type : $v_s(t) = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi) + v_{sSP}$.
Puisque le second membre est une constante, on s'attend à ce que la solution particulière soit elle aussi une constante : on pose $A = v_{sSP}$ et $B = -C$ ce qui donne la forme proposée par l'énoncé :

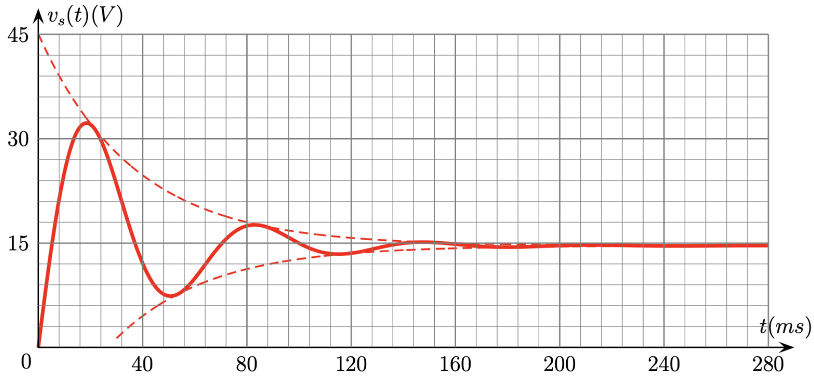
$$\boxed{v_s(t) = A - Be^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi)}$$

III.4.b
- ⋆ La constante A correspond au régime permanent : $\boxed{A = \frac{RE}{R+r}}$
- ⋆ On peut ensuite trouver α et ω en résolvant le polynôme caractéristique :
$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$
Comme $Q > 1/2$, on cherche alors des racines complexes donc :
$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$
Par identification : $\boxed{\alpha = \frac{\omega_0}{2Q} \qquad \text{et} \qquad \omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$
- ⋆ Finalement, on peut retrouver ϕ et B à l'aide des conditions initiales.
On a premièrement $\quad v_s(0^+) = 0 = A - B\cos(\phi)$
Par ailleurs $\quad \frac{dv_s}{dt}(0^+) = \frac{E}{rC} = B\left(\alpha\cos(\phi) + \omega\sin(\phi)\right)$
Ou encore $\quad \frac{E}{rC} = \alpha A + B\omega\sin(\phi)$
On doit découpler les équations, on peut pour cela faire apparaitre $\cos^2 + \sin^2 = 1$ ce qui permet de faire disparaitre ϕ pour trouver B, puis on en déduira ϕ.

$$\left\{\begin{array}{rcl} B\cos(\phi) & = & A \\ B\sin(\phi) & = & \dfrac{\frac{E}{rC} - \alpha A}{\omega} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} B^2(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) & = & A^2 + \left(\dfrac{\frac{E}{rC} - \alpha A}{\omega}\right)^2 \\ \sin(\phi) & = & \dfrac{\frac{E}{rC} - \alpha A}{B\omega} \end{array}\right.$$

d'où $$\boxed{B = \sqrt{A^2 + \left(\dfrac{\frac{E}{rC} - \alpha A}{\omega}\right)^2} \qquad \text{et} \qquad \phi = \text{Arcsin}\left(\dfrac{\frac{E}{rC} - \alpha A}{B\omega}\right)}$$

III.5 L'allure de $v_\mathrm{s}(t)$ est la suivante :



III.6 La loi des mailles s'écrit $\mathrm{E} = \mathrm{L}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + v_\mathrm{s}$ avec $i = \mathrm{C}\dfrac{\mathrm{d}v_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t}$

Ou encore
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 v_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{v_\mathrm{s}}{\mathrm{LC}} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{LC}}}$$

Du type
$$\frac{\mathrm{d}^2 v_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 v_\mathrm{s} = \omega_0^2 \mathrm{E}$$

$\boxed{\text{On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre } \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}.}$

III.7 À $t = 0^-$, la tension v_s aux bornes du condensateur correspond à la solution en régime permanent du circuit précédent : $v_\mathrm{s}(0^-) = \dfrac{\mathrm{RE}}{\mathrm{R}+r}$. Comme la tension aux bornes d'un condensateur ne peut subir de discontinuité :
$$\boxed{v_\mathrm{s}(0^+) = v_\mathrm{s}(0^-) = \frac{\mathrm{RE}}{\mathrm{R}+r}}$$

À $t = 0^-$, le courant i circulant dans la bobine (alors assimilable à un fil en régime permanent) est $i(0^-) = \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}+r}$. Comme le courant circulant dans une bobine ne peut subir de discontinuité :
$$i(0^+) = i(0^-) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}+r}$$

On en déduit
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{i(0^+)}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{E}}{(\mathrm{R}+r)\,\mathrm{C}}}$$

III.8 On a
$$v_\mathrm{s}(t) = v_\mathrm{sSH}(t) + v_\mathrm{sSP}$$

Donc
$$v_\mathrm{s}(t) = \mathrm{A}'\cos(\omega_0 t) + \mathrm{B}'\sin(\omega_0 t) + \mathrm{E}$$

A' est tel que
$$\mathrm{A}' + \mathrm{E} = \frac{\mathrm{RE}}{\mathrm{R}+r} \iff \mathrm{A}' = -\frac{r\mathrm{E}}{\mathrm{R}+r}$$

B' est tel que
$$\mathrm{B}'\omega_0 = \frac{\mathrm{E}}{(\mathrm{R}+r)\,\mathrm{C}} \iff \mathrm{B}' = \frac{\mathrm{E}}{(\mathrm{R}+r)}\sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}}}$$

Finalement
$$\boxed{v_\mathrm{s}(t) = -\frac{r\mathrm{E}}{\mathrm{R}+r}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{\mathrm{LC}}}\right) + \frac{\mathrm{E}}{(\mathrm{R}+r)}\sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{\mathrm{LC}}}\right) + \mathrm{E}}$$

IV. Flash lumineux

IV.1 On constate que l'équation (R) s'obtient par la combinaison linéaire suivante des autres réactions :

$$(\mathrm{R}) = (\mathrm{R_1}) - (\mathrm{R_2}) + (\mathrm{R_3})$$

Par conséquent $\boxed{\mathrm{K}^0 = \dfrac{\mathrm{K}_1^0 \mathrm{K}_3^0}{\mathrm{K}_2^0} = 8,4.10^{99}}$

IV.2 $\boxed{n_{\mathrm{Mg},0} = \dfrac{m_0}{\mathrm{M_{Mg}}} = 8,2.10^{-3}\ \mathrm{mol}}$ et $n_{\mathrm{air},0} = \dfrac{\mathrm{P_i V}}{\mathrm{RT}} = 4,0.10^{-2}\ \mathrm{mol}$

d'où $\boxed{n_{\mathrm{O_2},0} = x_{\mathrm{O_2}} n_{\mathrm{air},0} = 8,1.10^{-3}\ \mathrm{mol} \quad \text{et} \quad n_{\mathrm{N_2},0} = x_{\mathrm{N_2}} n_{\mathrm{air},0} = 3,2.10^{-2}\ \mathrm{mol}}$

Le diazote, présent initialement dans l'air, est une espèce spectatrice car elle n'est pas concernée par la réaction. Sa quantité reste donc constante.

IV.3 On établit le tableau d'avancement en quantités de matière :

	$\mathrm{Mg_{(s)}}$	+	$\frac{1}{2}\mathrm{O_{2(g)}}$	$\leftrightarrows$	$\mathrm{MgO_{(s)}}$	Tot gaz
$t=0$	$n_{\mathrm{Mg},0}$		$n_{\mathrm{O_2},0}$		0	$n_{\mathrm{O_2},0} + n_{\mathrm{N_2},0}$
t_f	$n_{\mathrm{Mg},0} - \xi_\mathrm{f}$		$n_{\mathrm{O_2},0} - \frac{\xi_\mathrm{f}}{2}$		ξ_f	$n_{\mathrm{O_2},0} + n_{\mathrm{N_2},0} - \frac{\xi_\mathrm{f}}{2}$

Comme $\dfrac{n_{\mathrm{Mg},0}}{1} < \dfrac{n_{\mathrm{O_2},0}}{1/2}$, le réactif limitant est $\mathrm{Mg_{(s)}}$ et $\xi_{\mathrm{fmax}} = 8,2.10^{-3}$ mol.

Faisons l'hypothèse d'un état final correspondant à un état d'équilibre.

On a alors $$\frac{a(\mathrm{MgO_{(s)}})_\mathrm{f}}{a(\mathrm{Mg_{(s)}})_\mathrm{f}\ a(\mathrm{O_2})_\mathrm{f}^{1/2}} = \mathrm{K}^0$$

Avec $a(\mathrm{MgO_{(s)}})_\mathrm{f} = a(\mathrm{Mg_{(s)}})_\mathrm{f} = 1$ et $a(\mathrm{O_2})_\mathrm{f} = \dfrac{(n_{\mathrm{O_2},0} - \frac{\xi_\mathrm{f}}{2})\mathrm{RT}}{\mathrm{V}}$

Cette hypothèse amène à $$\xi_\mathrm{f} = 2\left(n_{\mathrm{O_2},0} - \frac{\mathrm{V}}{(\mathrm{K}^0)^2\mathrm{RT}}\right)$$

Application numérique : $\xi_\mathrm{f} = 1,6.10^{-2}\ \mathrm{mol} > \xi_{\mathrm{fmax}}$

Comme on trouve $\xi_\mathrm{f} > \xi_{\mathrm{fmax}}$, notre hypothèse est fausse.

$\boxed{\text{L'état final correspond à une rupture d'équilibre avec disparition du solide } \mathrm{Mg_{(s)}} \text{ et } \xi_\mathrm{f} = \xi_{\mathrm{max}}.}$

NB : cet état final était attendu compte tenu du fait que le réactif limitant est un solide et que la constante K^0 est très grande.

On a donc à l'état final :

	$\mathrm{Mg_{(s)}}$	+	$\frac{1}{2}\mathrm{O_{2(g)}}$	$\leftrightarrows$	$\mathrm{MgO_{(s)}}$	Tot gaz
t_f (mol)	$\boxed{0}$		$4,0.10^{-3}$		$\boxed{8,2.10^{-3}}$	$3,6.10^{-2}$

On a alors $\boxed{x_{\mathrm{O_2 f}} = 0,11 \quad \text{et} \quad x_{\mathrm{N_2 f}} = 0,89}$

Et la pression totale finale est $\boxed{\mathrm{P_f} = 0,90\ \mathrm{bar}}$

♫