

## ANALYSE DIMENSIONNELLE ET OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

JEUDI 19 SEPTEMBRE 2024 - DURÉE 2H

- ★ Calculatrice et téléphone portable sont interdit.e.s.
- ★ Il sera tenu le plus grand compte du soin, de la présentation, et de la rédaction.
- ★ Chaque réponse doit être justifiée.
- ★ Par ailleurs, même lorsque ce n'est pas explicitement demandé, toute application numérique doit être précédée d'une expression littérale en fonction des données de l'énoncé.

POUR L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE DANS LES CONDITIONS DE GAUSS

Soient deux points conjugués A et A' par une lentille mince L, de centre O et de distance focale image  $f'$ , plongeant dans un milieu d'indice optique égal à 1 :

$$A \xrightarrow{(L,O,f')} A'$$

- Les relations de conjugaison de la lentille mince sont :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -(f')^2$$

- Les relations de grandissement de la lentille mince sont, pour un objet plan AB perpendiculaire à l'axe optique donnant une image A'B' :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = \frac{f'}{\overline{FA}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

## I. Instabilité de tôle ondulée

Lorsqu'une route en sable ou en gravier (masse volumique  $\rho \approx 2000 \text{ kg.m}^{-3}$ ) est soumise au passage répété de véhicules, des bosses régulièrement espacées apparaissent à sa surface. Ce phénomène, appelé instabilité de tôle ondulée (*washboard road*), est d'une part très gênant pour les passagers et d'autre part très dangereux à cause de la perte d'adhérence induite par les bosses.

Expérimentalement, on constate que cette instabilité apparaît uniquement si les voitures se déplacent au delà d'une vitesse critique  $v_c$ .

On remarque également que ce phénomène ne dépend que des paramètres suivants : la masse  $m$  du véhicule, la largeur du pneu  $L$ , la masse volumique de la piste  $\rho$ , l'accélération de la pesanteur  $g$  et bien sûr la vitesse  $v$  du véhicule.

On prendra numériquement  $g = 10$  en unité du système international.

1. À partir de  $v$  et  $g$ , il est possible de construire une quantité, notée  $\ell_1$ , homogène à une longueur. Déterminer l'expression de  $\ell_1$ .
2. De même, à partir des trois paramètres  $\rho$ ,  $m$  et  $L$ , il est possible de construire une quantité, notée  $\ell_2$ , homogène à une longueur. Déterminer l'expression de  $\ell_2$  sachant que  $\rho$  et  $L$  apparaissent avec la même puissance.
3. Le rapport  $\frac{\ell_1}{\ell_2}$  est appelé nombre de Froude, noté  $F_r$ . Quel est sa dimension ?
4. Expérimentalement, on observe que l'instabilité se développe lorsque le nombre de Froude dépasse un nombre de Froude critique  $F_{r,c}$ . Donnez alors l'expression de la vitesse critique  $v_c$  en fonction de  $F_{r,c}$ .
5. Des expériences de laboratoire montrent que :  $F_{r,c} = 5$ . Quelle est alors la vitesse critique pour une voiture d'une tonne, dont les pneus ont une largeur de 20 cm ?

## II. Miroir réel

Un miroir réel est constitué d'une fine couche métallique, appelée tain, considérée comme un miroir plan parfait, recouverte (pour la protéger) d'une lame de verre d'épaisseur  $e$  et d'indice  $n$ .

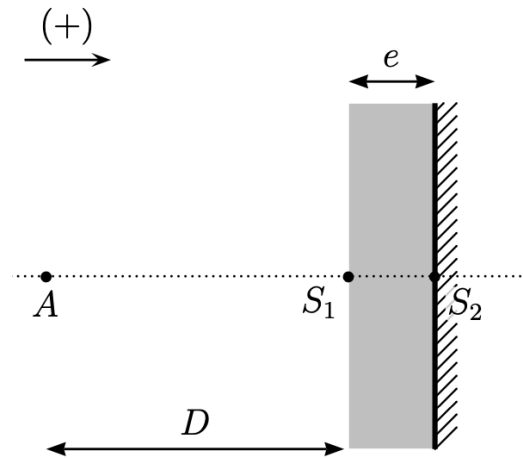
Soit un point objet  $A$ , soient  $S_1$  et  $S_2$  les points d'intersection de la normale au miroir passant par  $A$  avec les deux faces de la lame de verre. On note  $D$  la distance entre  $A$  et  $S_1$ .

On supposera dans cet exercice que les conditions de Gauss sont réalisées et pourra utiliser la formule de conjugaison du dioptre plan vue en cours dans cette approximation, c'est-à-dire :

$$\frac{\overline{HA}}{n_1} = \frac{\overline{HA'}}{n_2}$$

où  $A'$  est l'image conjuguée de  $A$  après passage par la lumière depuis le milieu d'indice  $n_1$  vers le milieu d'indice  $n_2$ , et  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur le dioptre.

Dans la suite de l'exercice, on considérera que l'indice de l'air est exactement égal à 1.



### II.1 Miroir équivalent - Méthode 1

1. On considère un rayon lumineux issu de  $A$  et arrivant vers le miroir avec un angle d'incidence  $i$ . Tracer la trajectoire complète de ce rayon sur un grand schéma.
2. Montrer par une construction géométrique soignée que pour un rayon particulier, ce miroir se comporte comme un miroir plan parfait équivalent ( $M_e$ ), parallèle au dioptre, sur lequel il n'y aurait qu'une simple réflexion.  
Représenter ce miroir sur la figure (on fera le schéma centré sur la lame d'une épaisseur suffisante).
3. Sachant que l'on est toujours dans les conditions de Gauss, déterminer, en fonction de  $e$  et  $n$ , la distance  $x$  entre le dioptre air/verre et le miroir équivalent. Outre la géométrie, on utilisera ici les lois de Descartes.

### II.2 Miroir équivalent - Méthode 2

4. On note  $A_1$  l'image de  $A$  par le dioptre air/verre,  $A_2$  l'image de  $A_1$  par le miroir plan, et  $A'$  l'image de  $A_2$  par le dioptre verre/air. Placer ces points sur la droite ( $AS_2$ ) en vous aidant du tracé réalisé à la première question (on fera une figure).
5. Déterminer par le calcul la position de  $A_1$  en utilisant la relation de conjugaison du dioptre plan. On exprimera en particulier  $\overline{S_1A_1}$  en fonction de  $\overline{S_1A}$  et des données du problème.
6. En déduire la position de  $A_2$ .  
On exprimera en particulier  $\overline{S_2A_2}$  en fonction de  $\overline{S_1A}$  et des données du problème.
7. En déduire finalement la position de  $A'$ .  
On exprimera en particulier  $\overline{S_1A'}$  en fonction de  $\overline{S_1A}$  et des données du problème.
8. On considère que deux systèmes optiques sont équivalents s'ils possèdent la même relation de conjugaison. Montrer que ce miroir réel est équivalent à un miroir plan parfait ( $M_e$ ) placé de telle sorte que  $\overline{S_1S_e} = \frac{e}{n}$ .

### III. Étude d'un téléobjectif

Un téléobjectif est un objectif de longue focale, c'est-à-dire un objectif dont la focale est supérieure à la diagonale de la pellicule pour un appareil photographique argentique ou de la matrice de cellules photosensibles dans le cas d'un appareil photographique numérique.

Ces objectifs permettent un cadrage serré des sujets photographiés grâce à un angle de champ étroit.

Dans les trois parties suivantes, largement indépendantes, le sujet photographié est constitué par la tour Eiffel culminant à une hauteur  $h = 324$  m du sol et située à une distance  $d = 2,0$  km du photographe.

#### III.1 Objectif standard

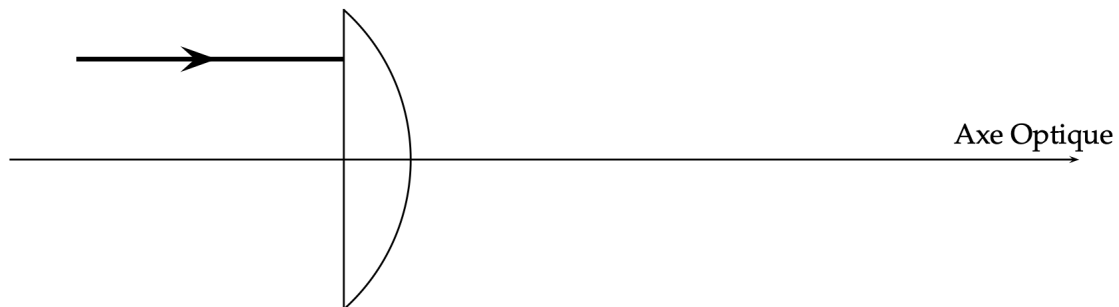
On s'intéresse dans un premier temps à un objectif standard d'appareil photographique argentique constitué d'une lentille convergente unique de centre O et de focale  $f' = 50$  mm.

1. Quelle doit être la distance D entre la lentille et la pellicule pour que la photographie soit nette ?
2. Construire sur un schéma l'image de l'objet sur la pellicule (sans respecter l'échelle).
3. On appelle  $h_1$  la hauteur de l'image de la tour Eiffel sur la pellicule. Déterminer son expression en fonction de  $f'$ ,  $d$  et  $h$  puis calculer sa valeur numérique.

#### III.2 Réalisation d'un téléobjectif avec une lentille unique

4. Expliquer pourquoi, si l'on souhaite photographier les détails d'un sujet lointain, il faut choisir un objectif de focale plus élevée que celle d'un objectif standard.
5. Dans le cas d'un téléobjectif de focale  $f'_0 = 200$  mm, calculer la hauteur  $h_2$  de l'image de la tour Eiffel sur la pellicule ainsi que l'encombrement de l'appareil (distance entre la lentille et la pellicule)

On considère dans un premier temps une lentille de verre d'indice  $n$  placée dans l'air (cf. figure ci-après). On se place dans l'approximation d'un indice  $n$  ne dépendant pas de la longueur d'onde.



6. Reproduire cette figure et tracer la marche du rayon incident représenté dans et après la lentille. Justifier sommairement le tracé.
7. Quelle est la nature de cette lentille ?
8. Définir le foyer image d'un système optique. Indiquer sur la figure le foyer image  $F'$  de la lentille.

L'indice de réfraction  $n$  du verre constituant la lentille dépend en réalité de la longueur d'onde  $\lambda$  de la radiation lumineuse qui la traverse.

Ils sont reliés par la loi de Cauchy :

$$n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes positives qui ne dépendent que du milieu traversé.

9. Comparer  $r_R$  et  $r_B$ , angles réfractés en sortie de lentille pour une radiation rouge et pour une radiation bleue en considérant des rayons incidents parallèles à l'axe optique.

Tracer alors les chemins suivis par ces deux radiations dans et après la lentille.

10. Expliquer le problème qui pourrait se poser si l'on réalisait un téléobjectif avec une lentille unique.

On peut s'affranchir de ce problème en réalisant un doublet, équivalent à une lentille convergente unique, constitué d'une lentille convergente accolée à une lentille divergente, les deux lentilles étant taillées dans des verres d'indices de réfraction différents. Le téléobjectif ainsi constitué présente toutefois l'inconvénient d'un encombrement important.

### III.3 Réalisation d'un téléobjectif par association de deux lentilles

Afin de raccourcir les téléobjectifs, en particulier les plus puissants, on peut réaliser un autre montage en associant deux lentilles distantes d'une distance  $e$  : une lentille convergente  $L_1$  (la première à être rencontrée par les rayons lumineux) de centre  $O_1$  et de focale  $f'_1$  et une lentille divergente  $L_2$  de centre  $O_2$  et de focale  $f'_2$ .

On prendra pour l'application numérique :  $f'_1 = 50$  mm,  $f'_2 = -25$  mm et  $e = \overline{O_1O_2} = 31$  mm.

On note  $P$  l'intersection du plan de la pellicule avec l'axe optique et  $F'$  l'image par le téléobjectif d'un point à l'infini sur l'axe optique.

11. Faire, à l'échelle, le tracé de la marche d'un rayon lumineux arrivant d'un point à l'infini sur l'axe optique. Indiquer notamment la position de  $P$ .
12. Déterminer littéralement la position de  $F'$  en fonction de  $f'_1$ ,  $f'_2$  et  $e$ .
13. En déduire l'expression de l'encombrement  $O_1P$  de l'appareil en fonction de ces mêmes grandeurs. L'application numérique donne  $O_1P \approx 11$  cm. Comparer cet encombrement à celui du téléobjectif étudié à la question 5.

