

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE**I. Instabilité de tôle ondulée**

I.1 On a $\dim(v) = LT^{-1}$ et $\dim(g) = LT^{-2}$.

d'où

$$\ell_1 = \frac{v^2}{g}$$

I.2 On a $\dim(m) = M$, $\dim(\rho) = ML^{-3}$ et $\dim(L) = L$.

d'où

$$\ell_2 = \sqrt{\frac{m}{\rho L}}$$

I.3 F_r est le rapport de deux longueurs, c'est donc un nombre sans dimension.

I.4 Au seuil de l'instabilité

$$F_{r,c} = \frac{v_c^2}{g \sqrt{\frac{m}{\rho L}}}$$

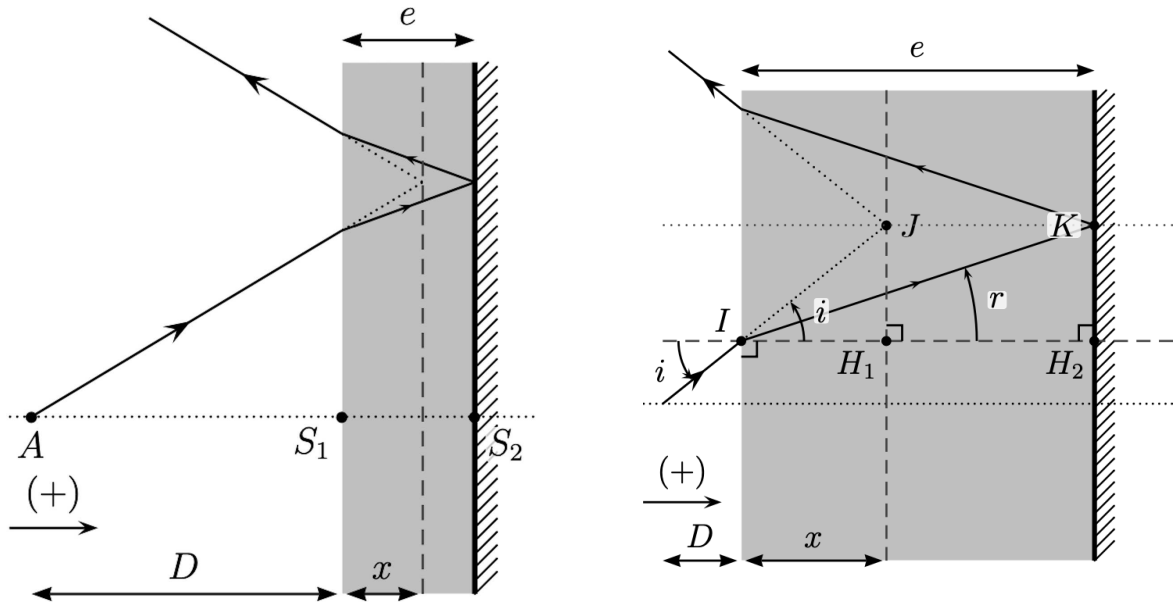
d'où

$$v_c = \sqrt{F_{r,c} \times g \sqrt{\frac{m}{\rho L}}}$$

I.5 Ainsi, la vitesse critique de la voiture décrite dans l'énoncé est d'environ $8,9 \text{ m.s}^{-1}$. Dès que la voiture dépasse cette vitesse elle détériore la route et amplifie les rides présentes sur la route. On remarque alors que l'instabilité de tôle ondulée se développe très facilement car on ne peut pas raisonnablement demander aux automobilistes de conduire en dessous de 32 km.h^{-1} dans beaucoup de situations.

II. Miroir réel

- II.1** On considère un rayon lumineux issu de A et arrivant vers le miroir avec un angle d'incidence i . Trajectoire représentée ci-dessous à gauche. On se rapproche de la normale lors de la réfraction.



- II.2** D'après les lois de la réflexion, on a une symétrie par rapport à une droite horizontale pour les rayons dans le verre, et donc le rayon arrive sur le dioptré verre-air avec la même inclinaison que celle qu'il avait après avoir passé le dioptré air-verre. Il va donc ressortir symétrique du rayon incident par rapport à une horizontale. D'après les schémas ci-dessus, on peut voir que tout se passe pour le rayon comme s'il se réfléchissait en J sur un miroir qui n'aurait pas de verre. On a représenté le miroir équivalent verticalement en pointillé.

- II.3** Compte tenu des symétries $H_2K = H_1J$

En utilisant les triangles rectangles IH_1J et IH_2K :

$$e \tan(r) = x \tan(i)$$

De plus la réfraction en I donne $1 \times \sin(i) = n \sin(r)$

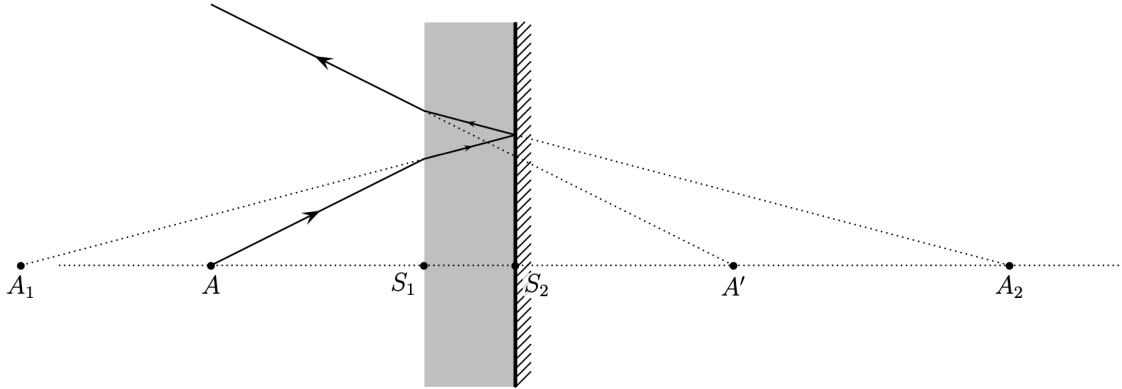
Comme on se place dans l'approximation de Gauss, on peut simplifier les formules précédentes en :

$$er = xi \quad \text{et} \quad i = nr$$

Soit finalement

$$\boxed{x = \frac{e}{n}}$$

II.4 On note A_1 l'image de A par le dioptre air/verre, A_2 l'image de A_1 par le miroir plan, et A' l'image de A_2 par le dioptre verre/air. Les points seront sur l'axe optique en pointillé horizontal car on pourrait tracer un rayon parfaitement horizontal qui ne serait pas dévié mais changerait juste de sens après réflexion sur le miroir. Pour placer les points, on se rappelle que l'image par un système optique (lorsqu'elle existe) est l'intersection des rayons émergents. Ici on est obligé de prolonger les rayons émergents, on a donc à chaque fois des images virtuelles.



II.5 L'image A_1 doit vérifier la relation de conjugaison donnée dans l'énoncé :

$$\boxed{\frac{\overline{S_1 A_1}}{n} = \frac{\overline{S_1 A}}{1}}$$

II.6 Puis A_2 est l'image de A_1 par le miroir, c'est donc le symétrique par rapport à S_2 :

$$\overline{S_2 A_2} = -\overline{S_2 A_1} = -(\overline{S_2 S_1} + \overline{S_1 A_1})$$

d'où

$$\boxed{\overline{S_2 A_2} = e - n\overline{S_1 A}}$$

On a ici utilisé la relation de Chasles et le fait que $e = \overline{S_1 S_2}$.

II.7 Enfin, A' est l'image de A_2 par le dioptre plan, on a donc d'après la relation de conjugaison :

$$\frac{\overline{S_1 A_2}}{n} = \frac{\overline{S_1 A'}}{1} \iff \overline{S_1 A'} = \frac{1}{n}(\overline{S_1 S_2} + \overline{S_2 A_2}) = \frac{1}{n}(e + (e - n\overline{S_1 A}))$$

Soit en simplifiant

$$\boxed{\overline{S_1 A'} = \frac{2e}{n} - \overline{S_1 A}}$$

II.8 On considère que deux systèmes optiques sont équivalents s'ils possèdent la même relation de conjugaison.

Supposons que l'on ait un miroir plan parfait placé en $\overline{S_1 S_e} = x$, alors l'image A' de A par ce miroir est telle que :

$$\overline{S_e A} = -\overline{S_e A'} \iff \overline{S_e S_1} + \overline{S_1 A} = -\overline{S_e S_1} - \overline{S_1 A'} \iff \overline{S_1 A} = -2\overline{S_e S_1} - \overline{S_1 A'} = 2x - \overline{S_1 A'}$$

Compte tenu de la relation précédente, cela correspond si et seulement si

$$\boxed{x = \frac{e}{n}}$$

Vu la question, on pouvait directement poser $x = e/n$ et vérifier que cela donnait la même relation de conjugaison.

III. Étude d'un téléobjectif

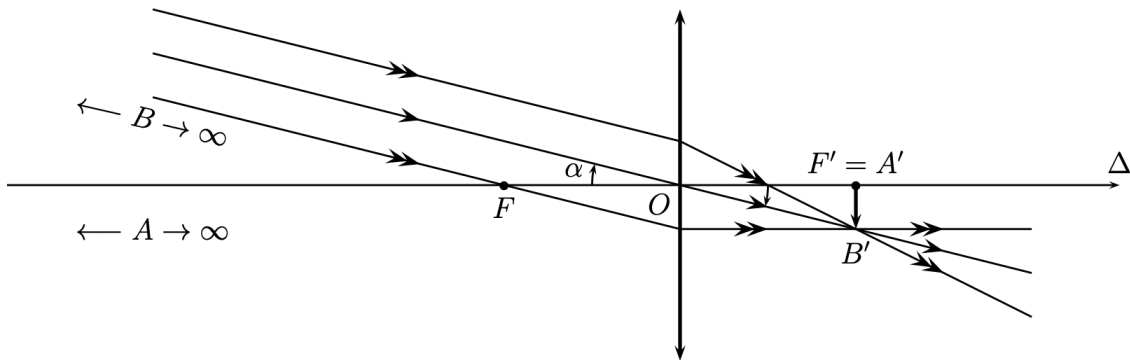
III.1 Comme la distance d qui sépare l'objet de la lentille est très grande devant la distance focale de la lentille, on peut considérer que l'objet est à l'infini. Son image se forme donc dans le plan focal image de la lentille situé à la distance f' de cette dernière.

d'où

$$D = f'$$

III.2 La lentille est considérée comme stigmatique, tous les rayons issus du sommet B de la tour Eiffel située très loin (à l'infini pour la lentille) convergeront en B' son image.

On peut ainsi tracer des rayons parallèles provenant de B dont celui passant par O.



III.3 En utilisant le théorème de Thalès dans les triangles $(OA'B')$ et (OAB) :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} = \tan \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \frac{h}{-d} = \frac{-h_1}{f'}$$

d'où

$$h_1 = \frac{f'}{d} h = 8,1 \text{ mm}$$

III.4 D'après l'expression trouvée à la question précédente, la taille de l'image de l'objet lointain est proportionnel à f' . Il en sera donc de même pour le grandissement.

Il sera donc préférable d'utiliser un objectif à grande focale si on veut percevoir les détails d'un objet lointain (γ important).

III.5 Comme l'objet (tour Eiffel) est toujours considérée l'infini ($d \ll f'_0$), son image se situe toujours dans le plan focal de la lentille.

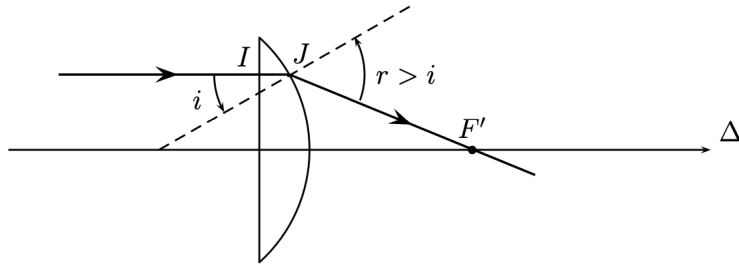
L'encombrement est donc égal à $\overline{OA'} = \overline{OF'} = f'_0 = 200 \text{ mm}$.

En reprenant directement l'expression obtenue lors de la première partie, on obtient cette fois :

$$h_2 = \frac{f'_0}{d} h = 32 \text{ mm}$$

- III.6** Sur la figure ci-après, le rayon traverse le dioptre plan en I sans être dévié puisque l'angle d'incidence est nul. Il arrive ensuite en J sur le dioptre sphérique de centre C sous une incidence i . Par application des lois de Snell-Descartes relatives à la réfraction, il reste dans le plan de la figure (plan d'incidence).

Le rayon s'éloigne de la normale en J ($r > i$) car il passe du verre d'indice n à l'air avec $n_{\text{air}} \simeq 1 < n$.



- III.7** Comme le rayon tracé, l'ensemble des rayons qui arrivent parallèlement à l'axe optique sont déviés vers l'axe optique donc la lentille est convergente.

- III.8** Le foyer principal F' de la lentille est par définition l'image d'un point situé à l'infini et sur l'axe optique Δ :

$$\boxed{A_{\infty} \longrightarrow F'}$$

Il est donc à l'intersection de l'axe optique et des rayons arrivant parallèlement à l'axe optique (c'est un point si le système est stigmatique).

- III.9** On considère qu'il y a bien réfraction en J. Par application de la loi de la réfraction, on a alors

$$n(\lambda) \sin(i) = n_{\text{air}} \sin(r)$$

Donc

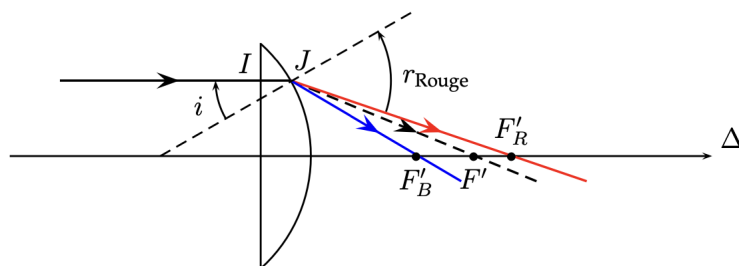
$$r = \text{Arcsin} [n(\lambda) \sin(i)]$$

Il s'agit d'une fonction croissante de $n(\lambda)$ (i ne dépend pas de la longueur d'onde car la lumière blanche ne subit pas de changement de direction sur le premier dioptre).

Par ailleurs, d'après la loi de Cauchy, $n(\lambda)$ est une fonction décroissante de λ .

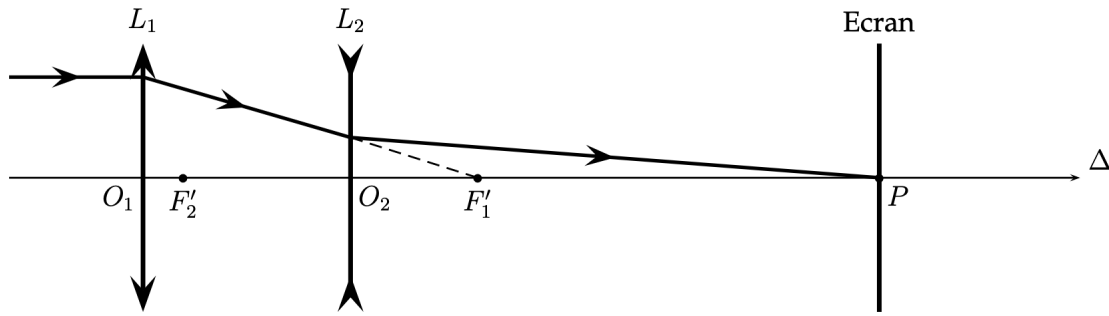
Ainsi

$$\boxed{\lambda_{\text{Bleu}} < \lambda_{\text{Rouge}} \iff n_{\text{Bleu}} > n_{\text{Rouge}} \iff r_{\text{B}} > r_{\text{R}}}$$



- III.10** En utilisant une lentille unique à grande focale, une variation, même faible, de $r(\lambda)$ va entraîner l'apparition d'aberrations chromatiques importantes.

III.11 Le tracé attendu est le suivant :



III.12 Le point \$F'\$ de l'axe optique est le foyer principal image du système, image d'un point \$A_\infty\$ placé à l'infini sur l'axe optique.

On peut résumer cela sous la forme du diagramme objet/image :

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 \xrightarrow{L_2} F'$$

\$F'\$ est l'image de \$F'_1\$ par la lentille \$L_2\$.

On peut alors en déduire la position de \$F'\$ par application d'une relation de conjugaison (Newton par exemple) à la lentille \$L_2\$:

$$\overline{F_2 F'_1} \cdot \overline{F'_2 F'} = -f_2'^2 \Rightarrow \overline{F'_2 F'} = \overline{F'_2 O_2} + \overline{O_2 O_1} + \overline{O_1 F'} = \frac{-f_2'^2}{\overline{F_2 O_2} + \overline{O_2 O_1} + \overline{O_1 F'_1}}$$

$$\Rightarrow -f'_2 - e + \overline{O_1 F'} = \frac{-f_2'^2}{-f_2 - e + f'_1}$$

d'où

$$\overline{O_1 F'} = \frac{-f_2'^2}{f_2' - e + f'_1} + f_2' + e$$

III.13 Si l'objet photographié est très loin (ce qui est le cas de la tour Eiffel), son image finale est dans le plan focal image du système. C'est à cet endroit qu'il faut placer la plaque photosensible \$P\$ pour obtenir une image nette sur \$A' = F' = P\$.

Il faut finalement

$$O_1 P = \overline{O_1 F'} = \frac{-f_2'^2}{f_2' - e + f'_1} + f_2' + e$$

L'encombrement du téléobjectif à deux lentilles (11 cm) est quasiment moitié plus petit que celui à une seule lentille (20 cm).

