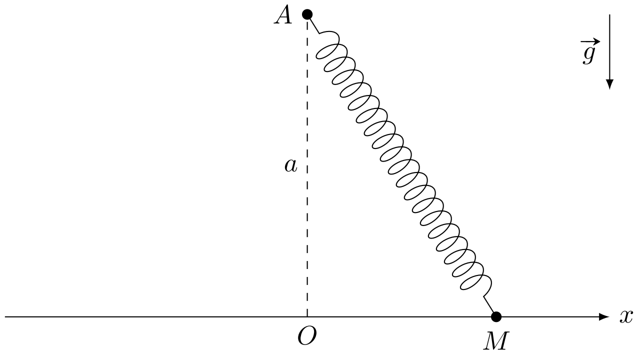
DM7 : Dynamique, énergie

Exercice 1 : Oscillateur de Landau



1. L'énergie potentielle est la somme de l'énergie potentielle élastique et de l'énergie potentielle de pesanteur. Comme l'altitude de l'anneau est constante, son énergie potentielle de pensanteur est constante et on peut la choisir nulle. Il ne reste plus que l'énergie potentielle élastique et on a

$$\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{a^2+x^2}-l_0\right)^2} \quad (1)$$

2. — Lorsque la longueur à vide du ressort l_0 est plus petite que a, le ressort va adopter la configuration où sa longueur est la plus courte possible. Il n'y aura qu'une position d'équilibre en $x = 0$.
   — Lorsque la longueur à vide du ressort est supérieure à a, il existe toujours une position d'équilibre en x_0 (qui devient instable) car en ce point, les forces subies par l'anneau sont verticales. Il y a en plus deux autres positions d'équilibre lorsque sa longueur du ressort vaut l_0. On aura donc dans ce cas

$$x = \pm\sqrt{l_0^2 - a^2} \quad (2)$$

3. Les positions d'équilibre sont les points où la dérivée de l'énergie potentielle s'annule :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = 0 \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{a^2+x^2}-l_0\right)^2 \frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} = 0 \quad (3)$$

   On a donc les solutions suivantes

$$\boxed{x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \pm\sqrt{l_0^2-a^2}} \quad (4)$$

4. Il faut déterminer le signe de $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}$. Le calcul fait à la question précédente montre que

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = kx\left(1-\frac{l_0}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) \quad (5)$$

   En dérivant une nouvelle fois, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2} = k\left(1-\frac{l_0}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) + \frac{kl_0x^2}{\sqrt{a^2+x^2}^3} \quad (6)$$

   — Pour la position d'équilibre en $x = 0$, on a

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(0) = k\left(1-\frac{l_0}{a}\right) \quad (7)$$

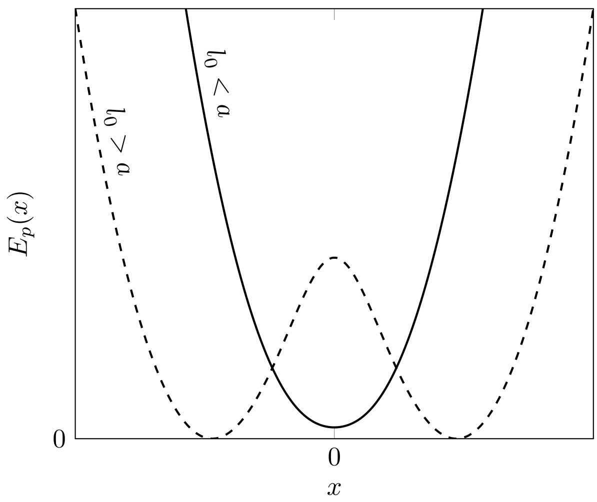
   Donc la position d'équilibre est stable lorsque $a > l_0$ et instable lorsque $a < l_0$.

— Pour les deux positions d'équilibres en $x_\pm = \pm\sqrt{l_0^2 - a^2}$, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_\pm) = k\frac{x_\pm^2}{l_0^2} > 0 \tag{8}$$

et on montre ainsi que ces positions d'équilibre sont stables.

5. On trace sur le graphique si dessous l'allure de $E_p(x)$ pour $a > l_0$ et pour $a < l_0$.



6. Lorsque $l_0 < a$, la position d'équilibre stable se trouve en $x = 0$. Pour trouver la pulsation des oscillations, on reprend l'expression de $\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(0)$ (équation 7) :

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(0) = k\left(1 - \frac{l_0}{a}\right) \tag{9}$$

Et on a (voir cours)

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(0)} = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{l_0}{a}\right)}} \tag{10}$$

7. Lorsque $l_0 \ll a$, ω_0 tend vers la valeurs

$$\boxed{\omega_l = \sqrt{\frac{k}{m}}} \tag{11}$$

8. Lorsque $l_0 > a$, les positions d'équilibre stables sont les $x_\pm$ définis à la question 4. Et on reprend l'expression de $\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_\pm)$ (équation 8) :

$$\frac{\mathrm{d}^2 Ep}{\mathrm{d}x^2}(x_\pm) = k\frac{x_\pm^2}{l_0^2} = k\left(1 - \frac{a^2}{l_0^2}\right) \tag{12}$$

Et comme à la question précédente, on trouve

$$\boxed{w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{a^2}{l_0^2}\right)}} \tag{13}$$

9. Lorsque $l_0 \gg a$, on retrouve que la pulsation des oscillations tend vers

$$\omega_l = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{14}$$

On pouvait s'attendre à ce résultat, car lorsque l_0 est très grande, les positions d'équilibre se trouvent très loin de l'origine sur l'axe x et le ressort est presque horizontal et le oscillations se font *dans l'axe* du ressort. C'est un cas très simple d'oscillateur mécanique pour lequel on a déjà montré plusieurs fois que la pulsation des oscillations est $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.