

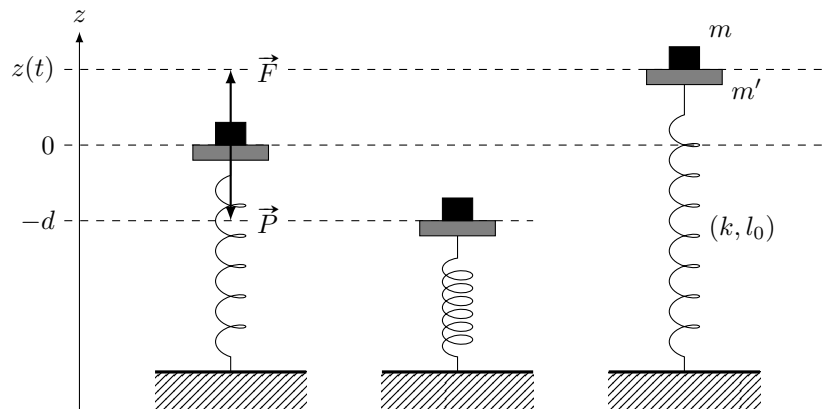
DM6 : Dynamique et chimie

Vous devez rendre une copie par groupe de 3 (ou 2, mais je préfère 3). Attention, tous les membres du groupe doivent avoir fait tout le DM ! Il ne s'agit pas de partager le travail.

Exercice 1 : DÉCOLLEMENT D'UNE MASSE

1. Les forces qui s'exercent sur le système sont :

- Le poids $\vec{P} = (m + m')\vec{g}$;
- La force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_z$



2. Lorsque la masse est à l'équilibre, on a $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$, en projetant cette équation sur l'axe (Oz) on obtient $-(m + m')g - k(l_{eq} - l_0) = 0$ donc

$$l_{eq} = l_0 - \frac{(m + m')g}{k} = l_0 - \frac{Mg}{k} \quad (1)$$

avec $M = m + m'$.

3. On applique le PFD à l'ensemble {masse+plateau}, on obtient : $\vec{F} + \vec{P} = M\vec{a}$ qui devient après projection sur l'axe z

$$-k(l - l_0) - Mg = M\ddot{z}$$

Or la longueur l du ressort est liée à z par $l = l_{eq} + z$. On obtient donc l'équation

$$-k(l_{eq} + z - l_0) - Mg = M\ddot{z} \quad \text{soit} \quad \ddot{z} + \frac{k}{M}z = 0$$

4. C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique dont la solution est $z(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$. On trouve A et φ avec les conditions initiales $z(0) = -d$ et $\dot{z}(0) = 0$, qui donnent $A = -d$ et $\varphi = 0$. Donc on a bien

$$z(t) = -d \cos(\omega_0 t) \quad (2)$$

5. Les forces appliquées à la masse m sont : son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force \vec{R} exercée par le plateau. Le PFD donne $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ soit en projection sur l'axe (Oz) : $-mg + R = m\ddot{z} = md\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$. Donc

$$R(t) = mg + md\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \quad (3)$$

6. La masse reste en contact avec le plateau tant que $R > 0$, or R ne s'annulera jamais si $md\omega_0^2 < mg$ soit $d < \frac{g}{\omega_0^2}$. On a donc

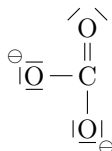
$$d_{lim} = \frac{g}{\omega_0^2} \quad (4)$$

7. La masse décolle du plateau lorsque $R = 0$, soit lorsque $\cos(\omega_0 t) = -\frac{g}{d\omega_0^2}$. En utilisant l'expression précédente de $z(t)$ on obtient bien $z_d = \frac{g}{\omega_0^2}$. La longueur du ressort à cet instant est donnée par $l_d = l_{eq} + z_d = l_0 - \frac{Mg}{k} + \frac{g}{\omega_0^2}$. En remplaçant ω_0^2 par $\frac{k}{M}$, on montre que $l_d = l_0$. La longueur du ressort est sa longueur à vide.
8. Le temps t_d auquel la masse quitte le plateau est solution de l'équation $-d \cos(\omega_0 t_d) = \frac{g}{\omega_0^2} = d_{lim}$.
- Si $d \approx d_{lim}$: $\cos(\omega_0 t_d) \approx -1$ et $t_d \approx \frac{\pi}{\omega_0}$, soit $t_d \approx \frac{T_0}{2}$. La masse quitte le plateau au sommet de la trajectoire juste avant que le plateau ne redescende.
 - Si $d \gg d_{lim}$: $\cos(\omega_0 t_d) \approx 0$ et $t_d \approx \frac{\pi}{2\omega_0}$, soit $t_d \approx \frac{T_0}{4}$. La masse quitte le plateau au moment où il passe par sa position d'équilibre.
9. La vitesse de la masse suivant l'axe (Oz) est $\dot{z}(t) = d\omega_0 \sin(\omega_0 t)$. Or comme $\sin(\omega_0 t) = \sqrt{1 - \cos^2(\omega_0 t)}$, on a

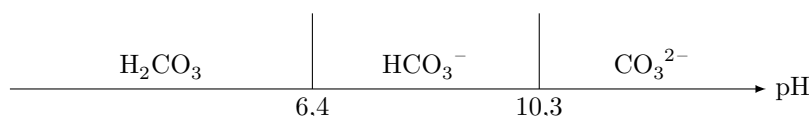
$$v_d = d\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{g}{d\omega_0^2}\right)^2} \quad (5)$$

Exercice 2 : L'ION CARBONATE

1. Représentation de Lewis :



2. Diagramme de prédominance :



L'ion hydrogénocarbonate peut se comporter comme un acide ou comme une base, c'est une espèce amphotère.

3. La réaction de dosage est :



La constante d'équilibre de cette réaction est $K = \frac{1}{K_{a3}} = 10^{10,3}$. La constante d'équilibre est très supérieure à 10^4 , donc la réaction est totale, et c'est ce que l'on recherche pour une réaction de titrage.

4. L'ion carbonate est une dibase, il y a deux réactions successives au cours du titrage :



La deuxième réaction est également totale puisque sa constante d'équilibre vaut $\frac{1}{K_{a1}} = 10^{6,4}$. On observe donc deux sauts de pH.

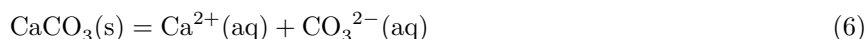
5. À la première équivalence, les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques :

$$n(\text{CO}_3^{2-})_{\text{titré}} = n(\text{H}_3\text{O}^+)_{\text{versé}} \quad (4)$$

$$C_i V_i = C_a V_1 \quad (5)$$

Soit : $C_i = \frac{C_a V_1}{V_i}$ Application numérique : $C_i = 8,4 \cdot 10^{-2} \text{ mol } \ell^{-1}$

6. Dissolution du carbonate de calcium dans l'eau :



7. Pour la solution saturée, on a $s = [\text{CO}_3^{2-}] = [\text{Ca}^{2+}]$.

Le produit de solubilité est vérifié : $K_s = \frac{[\text{CO}_3^{2-}][\text{Ca}^{2+}]}{c^{\circ 2}} = \frac{s^2}{c^{\circ 2}}$

$$s = c^{\circ} \sqrt{K_s} = 6,3 \cdot 10^{-5} \text{ mol } \ell^{-1} \quad (7)$$

8. Établissons un tableau d'avancement volumique dans ce cas :

	CaCO_3^{2-}	=	Ca^{2+}	+	CO_3^{2-}
État initial	c_0		c		0
État final	$c_0 - s'$		$c + s'$		s'

Le produit de solubilité s'écrit maintenant : $K_s = \frac{s'(c+s')}{c^{\circ 2}}$

La résolution numérique à la calculatrice donne : $s' = 4,0 \cdot 10^{-7} \text{ mol } \ell^{-1}$.

La solubilité s' du carbonate de calcium dans une solution qui contient déjà des ions calcium est inférieure à celle du carbonate de calcium dans l'eau pure : c'est *l'effet d'ion commun*.

9. En considérant les propriétés basiques de l'ion carbonate, il faut maintenant prendre en compte aussi les espèces HCO_3^- et H_2CO_3 car une partie des CO_3^{2-} va se transformer en une de ces espèces. La solubilité du carbonate de calcium correspond désormais à la somme des concentrations des différentes espèces carbonatées.
- 10.

$$s = [\text{CO}_3^{2-}] + [\text{HCO}_3^-] + [\text{H}_2\text{CO}_3] \quad (8)$$

$$s = [\text{CO}_3^{2-}] \left(1 + \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{c^{\circ} K_{a2}} + \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]^2}{c^{\circ 2} K_{a1} K_{a2}} \right) \quad (9)$$

De plus, on a :

$$[\text{CO}_3^{2-}] = \frac{c^{\circ 2} K_s}{[\text{Ca}^{2+}]} = \frac{c^{\circ 2} K_s}{s} \quad (10)$$

On obtient :

$$s^2 = c^{\circ 2} K_s + \frac{K_s c^{\circ}}{K_{a2}} [\text{H}_3\text{O}^+] + \frac{K_s}{K_{a1} K_{a2}} [\text{H}_3\text{O}^+]^2 \quad (11)$$

En identifiant : $A = c^{\circ 2} K_s$, $B = \frac{K_s c^{\circ}}{K_{a2}}$ et $C = \frac{K_s}{K_{a1} K_{a2}}$.