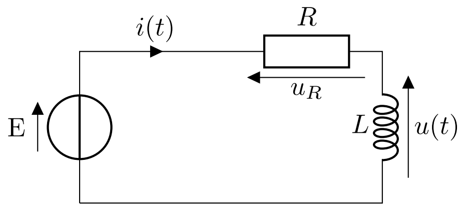
DM3 : Électricité et chimie – corrigé

Exercice 1 : Circuits RL

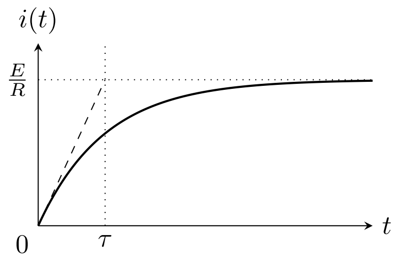
A – Premier ordre

Pour $t > 0$, on a le circuit suivant :

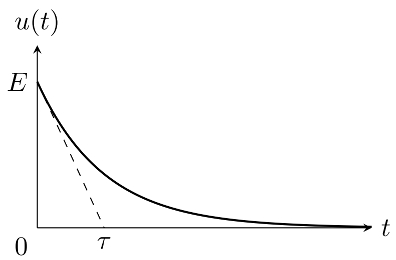


1. Dans le schéma ci-dessus, on a :
   — $u_R = Ri$ (loi d'Ohm)
   — $u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ (bobine)
   — $E = u + u_R$ (loi des mailles)

   En injectant les deux premières équations dans la troisième, on obtient l'équation différentielle :
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{1/\tau} i = \frac{E}{L}$$
2. L'intensité du courant étant continue dans une bobine, on a $i(0^+) = i(0^-) = 0$ (interrupteur ouvert pour $t < 0$). La solution générale de l'équation différentielle est
$$i(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{E}{R}$$
   et la condition initiale nous permet de trouver $K = -\frac{E}{R}$ donc finalement
$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$
3. L'évolution de $i(t)$ est :

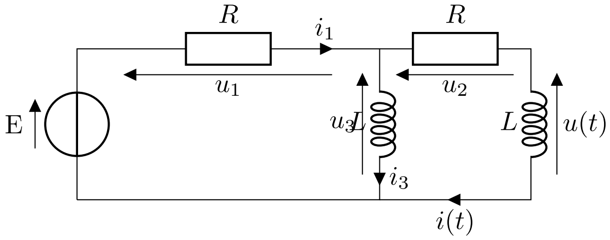


   On trouve τ en cherchant l'abscisse de l'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote horizontale en $t \to +\infty$.
4. On a
$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$



B – Deuxième ordre

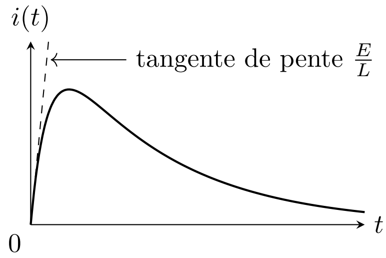
Pour $t > 0$ le circuit est :

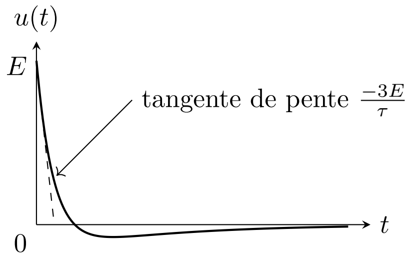


5. On écrit les différentes relations dans ce circuit :
   — $u_3 = L\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t}$ (bobine)
   — $u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ (bobine)
   — $u_1 = Ri_1$ (Ohm)
   — $u_2 = Ri$ (Ohm)
   — $i + i_3 = i_1$ (loi des nœuds)
   — $E = u + u_1 + u_2$ (lois des mailles)
   — $u_3 = u + u_2$ (lois des mailles)

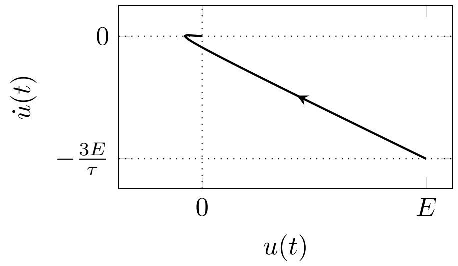
   En partant de la première loi des mailles, on a :
   $$E = u + u_1 + u_2 = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri_1 + Ri = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R(i_3 + i) + Ri$$
   En dérivant cette équation, on obtient :
   $$0 = L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} + 2R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}u_3 + 2R\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2}$$
   enfin en remplaçant u_3 par $u + Ri$ on obtient l'équation différentielle demandée :
   $$\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau^2}i = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$
6. On identifie cette équation avec celle d'un oscillateur harmonique amorti :
   $$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$
   et on trouve $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ et $Q = \frac{1}{3}$. Comme $Q < \frac{1}{2}$, l'oscillateur se trouve en régime apériodique.
7. On écrit l'équation caractéristique
   $$r^2 + \frac{3}{\tau}r + \frac{1}{\tau^2} = 0$$
   Le discriminant est $\Delta = \frac{9}{\tau^2} - \frac{4}{\tau^2} = \frac{5}{\tau^2}$ et les deux solutions sont
   $$r_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{\tau} \pm \sqrt{\Delta}\right) = \frac{1}{2\tau}\left(-3 \pm \sqrt{5}\right)$$
   et la solution générale de l'équation différentielle est :
   $$i(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$$
8. Par continuité de l'intensité qui circule dans une bobine, on a $i(0^+) = i_3(0^+) = 0$.
   On en déduit que $i_1(0^+) = 0$. Et donc $u_1(0^+) = u_2(0^+) = 0$ (loi d'Ohm)
   Donc d'après la loi des mailles, $u(0^+) = E = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+)$, d'où $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{L}$.
9. On a $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{3L}{\tau}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - L\frac{i}{\tau^2}$ (d'après l'équation différentielle). En utilisant les résultats de la question précédente, on trouve
   $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = -3\frac{E}{\tau}$$
10. Au bout d'un temps très long, c'est à dire lorsque le régime permanent est atteint, les deux bobines ne comportent comme des fils et on a $u(t) = 0$ et $i(t) = 0$ loi des mailles dans la maille de droite.

11. On donne les évolutions de $i(t)$ et $u(t)$ ci-dessous :





12. Le portrait de phase de $\dot{u}(t)$ en fonction de $u(t)$ est :



13. Au bout d'un temps très long, les deux bobines se comportent comme des fils, on a déja montré que $i(\infty) = 0$ donc l'énergie stockée dans la bobine de droite est $E_1 = \frac{1}{2}Li^2 = 0$. Le courant qui circule dans la bobine de gauche est $i_3(\infty) = \frac{E}{R}$ et l'énergie stockée dans la bobine de gauche est

$$E_2 = \frac{1}{2}Li_3^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2$$

Exercice 2 : Oxydation de l'ammoniac

1. Si les réactifs sont apportés en proportions stœchiométriques, on a $5n_{NH_3} = 4n_{O_2}$. De plus, dans l'air, on a $n_{N_2} = 4n_{O_2}$. En notant $\alpha = n_{O_2}$, la quantité de matière totale de gaz dans le mélange est :

$$n_{\text{tot}} = \alpha + 4\alpha + \frac{4}{5}\alpha = \frac{29}{5}\alpha \tag{1}$$

Et les fractions molaires de NH_3, O_2 et N_2 dans le mélange sont :

$$\boxed{x_{NH_3} = \frac{n_{NH_3}}{n_{\text{tot}}} = \frac{4}{29} \approx 0{,}14 \quad x_{O_2} = \frac{n_{O_2}}{n_{\text{tot}}} = \frac{5}{29} \approx 0{,}17 \quad x_{N_2} = \frac{n_{N_2}}{n_{\text{tot}}} = \frac{20}{29} \approx 0{,}69} \tag{2}$$

2. Dans le mélange, il y a initialement $n_1 = x_1 n_i = 10\,\text{mol}$ de NH_3, il reste alors $n_{\text{air}} = n_i - n_1 = 90\,\text{mol}$ d'air composé à 80 % de N_2 et 20 % de O_2. On a alors

$$\boxed{n_1 = 10\,\text{mol} \quad n_2 = (n_i - n_1) \times 0{,}2 = 18\,\text{mol} \quad \text{et} \quad n_3 = (n_i - n_1 - n_2) = 72\,\text{mol}} \tag{3}$$

3. On a le tableau d'avancement suivant :

	$4\,NH_3$	$+$	$5\,O_2$	$\rightleftharpoons$	$4\,NO$	$+$	$6\,H_2O$	n_{gaz}
État initial	n_1		n_2		0		0	$n_1 + n_2 + n_3$
État final	$n_1 - 4\xi_{\text{éq}}$		$n_2 - 5\xi_{\text{éq}}$		$4\xi_{\text{éq}}$		$6\xi_{\text{éq}}$	$n_1 + n_2 + n_3 + \xi_{\text{éq}}$

4. On écrit l'équation des gaz parfaits dans l'état initial, on a $PV_0 = n_i RT$. Donc

$$\boxed{V_0 = \frac{n_i RT}{P} = 8{,}9\,\text{m}^3} \tag{4}$$

À l'équilibre, la quantité de matière totale de gaz dans le système est $n_{\text{éq}} = n_1 + n_2 + n_3 + \xi_{\text{éq}} = n_i + \xi_{\text{éq}}$ (voir tableau d'avancement, ne pas oublier N_2). On aura donc d'après l'équation des gaz parfaits :

$$V_{\text{éq}} = \frac{n_{\text{éq}}RT}{P} = \frac{RT}{P}(n_i + \xi_{\text{éq}}) \tag{5}$$

Finalement, en utilisant l'équation 4, on obtient

$$\boxed{V_{\text{éq}} = V_0\left(1 + \frac{\xi_{\text{éq}}}{n_i}\right)} \tag{6}$$

5. On écrit l'expression de la constante d'équilibre, on a

$$K^\circ = \frac{p(\text{NO})^4 p(\text{H}_2\text{O})^6}{p^\circ p(\text{NH}_3)^4 p(\text{O}_2)^5} = \frac{RT}{p^\circ V_{\text{éq}}} \frac{(4\xi_{\text{éq}})^4(6\xi_{\text{éq}})^6}{(n_1 - 4\xi_{\text{éq}})^4(n_2 - 5\xi_{\text{éq}})^5} \tag{7}$$

Et en utilisant l'équation 6, on obtient :

$$\boxed{K^\circ = \frac{P}{p^\circ}\frac{1}{n_1 + n_2 + n_3 + \xi_{\text{éq}}}\frac{(4\xi_{\text{éq}})^4(6\xi_{\text{éq}})^6}{(n_1 - 4\xi_{\text{éq}})^4(n_2 - 5\xi_{\text{éq}})^5}} \tag{8}$$

Comme $K^\circ \gg 10^4$, on peut considérer que la réaction est totale. Dans ces conditions, il faut déterminer le réactif limitant. Comme $n_1/4 < n_2/5$, le réactif limitant est NH_3 et on a $\xi_{\text{éq}} = \frac{n_1}{4} = 2{,}5\,\text{mol}$

6. Les pressions partielles des gaz à l'équilibre sont donc

$$p(\text{NH}_3) \approx 0\,\text{bar} \tag{9}$$
$$p(\text{O}_2) = \frac{n_2 - 5\xi_{\text{éq}}}{n_i + \xi_{\text{éq}}}P \approx 5{,}4 \cdot 10^{-2}\,\text{bar} \tag{10}$$
$$p(\text{N}_2) = \frac{n_3}{n_i + \xi_{\text{éq}}}P \approx 7{,}0 \cdot 10^{-1}\,\text{bar} \tag{11}$$
$$p(\text{NO}) = \frac{4\xi_{\text{éq}}}{n_i + \xi_{\text{éq}}}P \approx 9{,}8 \cdot 10^{-2}\,\text{bar} \tag{12}$$
$$p(\text{H}_2\text{O}) = \frac{6\xi_{\text{éq}}}{n_i + \xi_{\text{éq}}}P \approx 1{,}5 \cdot 10^{-1}\,\text{bar} \tag{13}$$

7. Pour déterminer l'ordre de grandeur de la pression de NH_3 à l'équilibre, on reprend l'équation 8 en remplaçant $\xi_{\text{éq}}$ par la valeur déterminée précédemment, sauf pour le terme $n_1 - 4\xi_{\text{éq}}$. On obtient alors

$$n_f(\text{NH}_3) = n_1 - 4\xi_{\text{éq}} = \left(\frac{P}{p^\circ}\frac{1}{n_i + \xi_{\text{éq}}}\frac{(4\xi_{\text{éq}})^4(6\xi_{\text{éq}})^6}{K^\circ(n_2 - 5\xi_{\text{éq}})^5}\right)^{1/4} \approx 9{,}6 \cdot 10^{-13}\,\text{mol} \tag{14}$$

Ce qui correspond à une pression de l'ordre de

$$\boxed{p(\text{NH}_3) = \frac{n_f}{n_i + \xi_{\text{éq}}}p \approx 9 \cdot 10^{-15}\,\text{bar}} \tag{15}$$

C'est vraiment très faible et complètement indétectable.