DM2 : Optique géométrique et circuits électriques

Exercice 1 : Observation de Jupiter

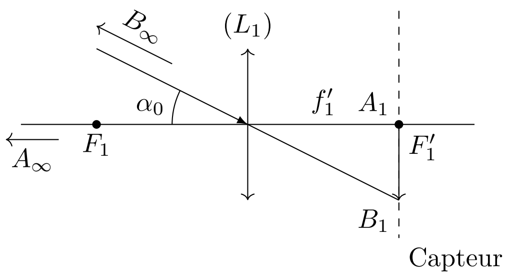
1. (a) L'angle maximal correspond à la distance Terre – Jupiter la plus petite soit $d = R_J – R_T$ d'où, en faisant l'approximation des petits angles, $\alpha_0 = d_J/(R_J – R_T) = 2{,}2 \cdot 10^{-4}\,\text{rad} = 45''$
   (b) Vus de la Terre, le Soleil et Jupiter se trouve dans dans directions opposées.
2. La troisième loi de Kepler nous permet de calculer la période de révolution de Jupiter : $T_J^2 = \frac{T_T^2}{R_T^3} R_J^3$ d'où

$$\boxed{T_J = T_T \left(\frac{R_J}{R_T}\right)^{3/2} = 4330\,\text{jours.}} \tag{1}$$

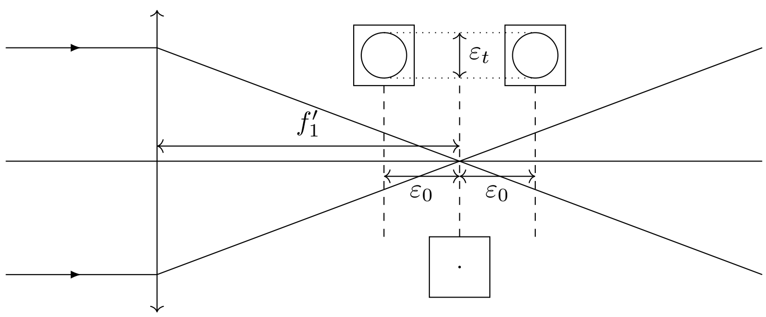
Notons $\omega_T = \frac{2\pi}{T_T}$ et $\omega_J = \frac{2\pi}{T_J}$ les vitesses de rotations de la Terre et de Jupiter autour du Soleil. La vitesse de rotation relative entre les deux est $\omega = \omega_T - \omega_J$, et le temps qui sépare deux oppositions de Jupiter est $T = \frac{2\pi}{\omega}$ donc

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_T} - \frac{2\pi}{T_J}} = \frac{1}{\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_J}} = \frac{T_T T_J}{T_J - T_T} \simeq 400\,\text{jours}} \tag{2}$$

3. On a $S = h_c l_c$ et $d_c^2 = l_c^2 + h_c^2$. En résolvant ces deux équations avec $h_c < l_c$ on trouve $h_c \simeq 2{,}69\,\text{mm}$ et $l_c \simeq 3{,}59\,\text{mm}$.
   La surface ε_c^2 d'un pixel est S_c/N d'où $\varepsilon_c \simeq 5{,}6\,\mu\text{m}$.
4. La distance Terre – Jupiter la plus petite est $R_J - R_T \simeq 630 \cdot 10^6\,\text{km} \gg f' = 2{,}3\,\text{m}$ donc on pourra bien considérer Jupiter à l'infini.
5. Schéma :

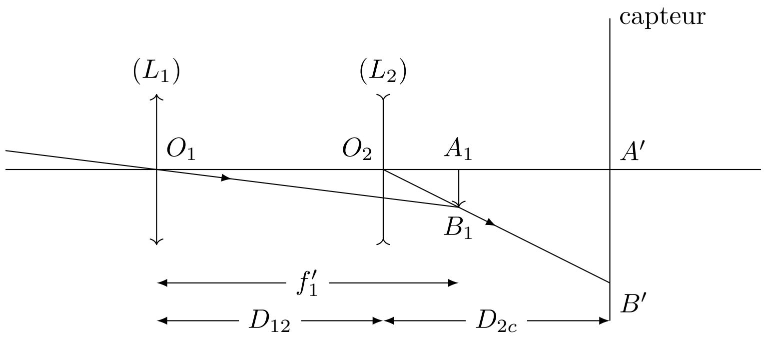


6. L'image d'un objet à l'infini se trouve dans le plan focal image de la lentille soit à la distance focale $f'_1 = 2350\,\text{mm}$. L'image a une largeur $L = \alpha_0 f'_1$ soit $L/\varepsilon_c = 102\,\text{pixels}$.
7. Schéma :



Quel que soit le sens de décalage, l'image d'un point est une tache de largeur $\varepsilon_t = \varepsilon_0 \frac{d_1}{f'_1}$ (Théorème de Thalès).

8. Cette non-ponctualité ne se remarque pas si $\varepsilon_t < \varepsilon_c$ donc si $\varepsilon_0 < \varepsilon_c \frac{f'1}{d_1} = \varepsilon_{0_{\max}} = 56\,\mu\text{m} = 10\,\text{pixels}$
9. Schéma :



10. D'après le théorème de Talès, on a $D_{2c} = 3O_2A_1$ d'où $D_{12} = f'_1 - O_2A_1 = 2350 - 200/3 = 2283\,\text{mm}$.
    La relation de Descartes permet de déterminer f'_2 : $\frac{1}{D_{2c}} - \frac{1}{O_2A_1} = \frac{1}{f'_2}$ d'où $f'_2 = -100\,\text{mm}$. (f'_2 est négative car c'est une lentille divergente)
11. Avec une lentille convergente de distance focale équivalente f', l'image de Jupiter est de largeur $L = \alpha_0 f'$: L'image sera trois fois plus grande si la distance focale est trois fois plus grande d'où le terme de *tripleur de focale*. L'encombrement est moindre avec deux lentilles.

Exercice 2 : Réseau infini de résistors

I – Étude du circuit initial

1. Les deux résistors (haut et droite) peuvent être associés en série ($R_{eq} = 3R$) et on observe alors un pont diviseur de tension avec le résistor du bas. On en déduit :

$$\boxed{u_R = \frac{R}{R + R_{eq}} E = \frac{E}{4} \approx 1{,}5\,\text{V}} \tag{1}$$

2. On a d'après le cours $P_r = u_R^2/R$ soit ici :

$$\boxed{P_r = \frac{E^2}{16R} \approx 2{,}25\,\text{mW}} \tag{2}$$

3. On a premièrement $P_f = Ei$ (convention générateur) et il convient de terminer i. On sait pour cela que $u_R = Ri$ d'où $P_r = Eu_R/R$. On a alors pour le rendement :

$$\eta = \frac{P_r}{P_f} = \frac{Ru_R^2}{REu_R} = \frac{u_R}{E} \Rightarrow \eta = \frac{1}{4} \tag{3}$$

   Ainsi, seul un quart de la puissance fournie par le générateur se retrouve consommé dans la résistance du bas. En effet, on peut décomposer la résistance de droite en deux résistances de valeurs R et obtenir quatre résistors identiques qui se répartissent la puissance fournie.

II – Etude du circuit complet

4. Dans le premier cas, on observe la présence de trois résistors en série soit $R_1 = R + 2R + R = 4R$. Dans le deuxième cas, on peut mettre en série les résistors de droite pour former $R_{eq} = 4R$, puis relier les deux résistors en parallèle et ajouter le dipôle ainsi obtenu au résistor en haut à gauche et à celui en bas à gauche (association en série). On a ainsi :

$$R_2 = 2R + \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{4R}} \tag{4}$$

   donc

$$\boxed{R_2 = \frac{10}{3} R} \tag{5}$$

5. On peut effectuer la décomposition suivante : et on peut ainsi simplifier le schéma en associant les deux dipôles de droite en parallèle puis les dipôles restant en série :

$$\boxed{R_n = 2R + \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R_{n-1}}}} \tag{6}$$

6. On effectue un passage à la limite dans la relation de récurrence obtenue à la question précédente :

$$R_\infty = 2R + \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R_\infty}} \Rightarrow \frac{R_\infty}{2R} = x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{1+x} \tag{7}$$

On cherche alors à determiner x :

$$x + x^2 = 1 + 2x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \tag{8}$$

Ce polynôme du deuxième degré admet pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$ et donc deux solutions réelles : $x_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$. On ne retiens que la solution positive car on sait que (R_n) converge vers une valeur positive. On en déduit au final :

$$\boxed{R_\infty = 2Rx = \left(1 + \sqrt{5}\right) R \approx 3{,}24\,\mathrm{k\Omega}} \tag{9}$$