

Particules chargées, solides en rotation, thermodynamique

JEUDI 26 MARS 2026 - DURÉE 3H00

- ★ La calculatrice est autorisée.
- ★ Le téléphone portable est interdit.
- ★ Il sera tenu le plus grand compte du soin, de la présentation, et de la rédaction.
- ★ Chaque réponse doit être justifiée.
- ★ Par ailleurs, même lorsque ce n'est pas explicitement demandé, toute application numérique doit être précédée d'une expression littérale en fonction des données de l'énoncé.

I. La marche du berger landais sur échasses (CCINP 2024)

Afin de parcourir de longues distances dans la lande et pour surveiller leurs troupeaux de moutons, les bergers landais utilisaient des échasses (figure 1). Les premiers témoignages de cette pratique remontent au XVIIIe siècle. Celle-ci a progressivement disparu jusqu'au début du XXe siècle avec l'extension de la forêt qui marqua la fin du pastoralisme. De nos jours, des groupes folkloriques d'échassiers s'attachent à perpétuer et à faire revivre ce patrimoine culturel landais.



FIGURE 1 – Berger landais sur ses échasses

Les échasses sont constituées de deux pièces de bois : l'escasse (“jambe” en patois landais) et le paouse pé (“repose pied”), fixé sur l'escasse, le plus souvent à une hauteur par rapport au sol comprise entre 90 cm et 1,20 m. Deux lanières de cuir sont prévues pour que l'échassier attache son pied et sa jambe à l'échasse.

On se propose d'étudier la marche sur échasses en établissant quels paramètres mécaniques sont modifiés par rapport à la marche ordinaire et de déterminer s'il est pertinent de qualifier cette pratique de “marche à pied augmentée”.

Commençons par décrire la marche ordinaire : la marche est une activité complexe, nécessitant l'action coordonnée de 48 muscles de contrôle de la position du tronc et des membres inférieurs afin de permettre au marcheur de se déplacer vers l'avant avec un rendement optimal.

Le cycle de la marche comprend deux phases pour chaque jambe : une phase de double contact et une phase d'oscillation, illustrées en figure 2. Les schémas en figure 3a et 3b précisent les notations utiles à la description des phases de double contact et d'oscillation gauche.

La description du mouvement est menée dans le référentiel du sol supposé galiléen.

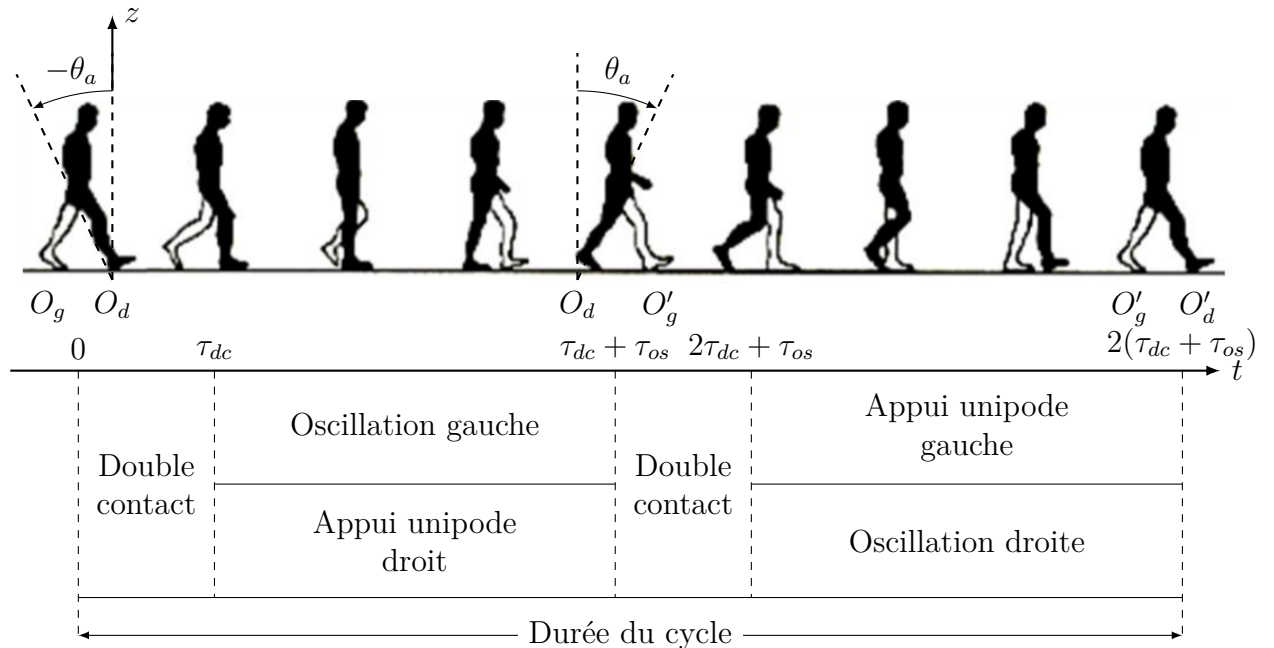


FIGURE 2 – Phases du cycle de la marche

Phase de double contact

À la date $t = 0$, la jambe droite prend appui sur le sol, en O_d (elle vient de terminer son oscillation) (figures 2 et 3a) ; elle est immobile à cet instant (sa vitesse angulaire de rotation est nulle : $\Omega(0) = 0$) et se trouve inclinée d'un angle $\theta = -\theta_a$ par rapport à la verticale ascendante $O_d z$. Grâce à l'action des muscles, elle amorce alors un mouvement de rotation à la vitesse angulaire variable $\Omega(t)$ autour de l'axe $O_d y$ perpendiculaire au plan de figure ($xO_d z$), tandis que la jambe gauche, elle aussi en appui sur le sol, en O_g , transfère le poids du corps sur la jambe droite : durant cette phase, de durée τ_{dc} , l'énergie cinétique des deux jambes augmente et le centre de masse du buste s'élève. À la date $t = \tau_{dc}$, la jambe droite passe par la position verticale, tandis que la jambe gauche, libérée du poids du corps, quitte son appui au sol.

Phase d'oscillation gauche

À partir de la date $t = \tau_{dc}$ et jusqu'à la date $t = \tau_{dc} + \tau_{os}$, la jambe gauche, libérée de son appui au sol, opère, sous la seule action de son poids, une oscillation pendulaire de durée τ_{os} autour de l'axe de son pivot fémoral $F_g y$ (figure 3b) (on suppose que la présence du sol ne gêne pas l'oscillation). Cette phase est concomitante de la phase d'appui unipode droit (nommée ainsi car seule la jambe droite est alors en appui au sol et poursuit sa rotation autour de $O_d y$ jusqu'à la position $\theta = \theta_a$ représentée en pointillés sur la figure 3a).

Appuis au sol et définition du pas

Après son appui au sol au point O_g , la jambe gauche reprend appui au sol en O'_g , à la distance $2p$ devant O_g et à la distance p devant O_d : $p = O_g O_d = O_d O'_g$ définit le pas de la marche.

Le cycle se poursuit alors en intervertissant les rôles des jambes gauche et droite.

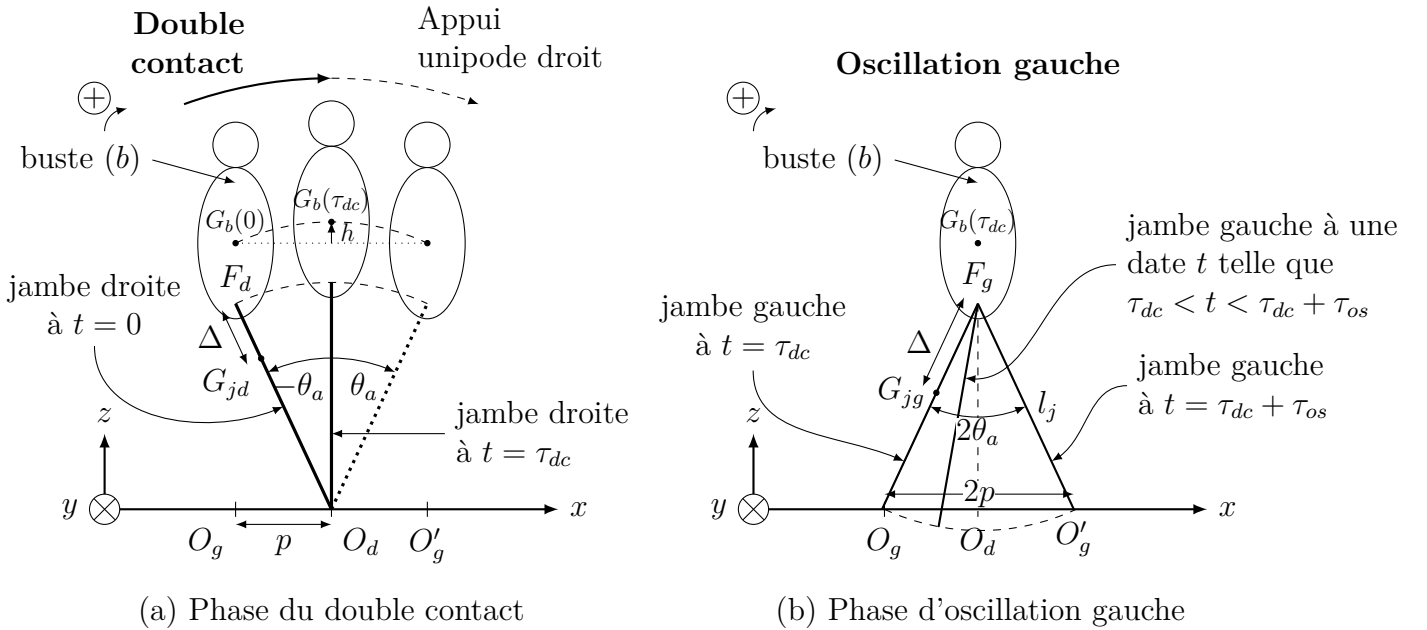


FIGURE 3 – Description des phases du cycle de marche

On adopte le modèle mécanique simplifié suivant :

Chaque jambe est modélisée par une tige solide, de longueur l_j , de masse m_j , de centre de masse G_j et d'extrémité F (pivot fémoral). Ces points sont notés G_{jd} et F_d pour la jambe droite (j_d) et G_{jg} et F_g pour la jambe gauche (j_g). Le buste (b) est modélisé par un solide de masse m_b et de centre de masse G_b . L'ensemble $(\Sigma) = \{(j_d), (j_g), (b)\}$ constitue le marcheur.

On note :

- $\Delta = F_d G_{jd} = F_g G_{jg}$;
- $\vec{g} = -g \vec{e}_z$;
- J_F le moment d'inertie de (j_d) (respectivement (j_g)) par rapport à l'axe $F_d y$ (respectivement $F_g y$) ;
- J_O le moment d'inertie de (j_d) (respectivement (j_g)) par rapport à l'axe $O_d y$ (respectivement $O_g y$).

I.1 Étude de la phase d'oscillation gauche

Soit $\theta(t)$ la position angulaire de (j_g) par rapport à la verticale descendante (figure 3b).

1. En appliquant le théorème du moment cinétique à (j_g) dans le référentiel du buste supposé galiléen, établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ pendant cette phase d'oscillation.
2. Définir ce que sont des oscillations isochrones.
3. Dans l'approximation des petits angles, le mouvement de (j_d) est-il isochrone ?
4. Exprimer, dans cette approximation, la pulsation ω_{os} et la durée τ_{os} de cette phase oscillante en fonction de m_j , J_F , g et de Δ .

I.2 Etude de la phase de double contact

Afin d'évaluer le coût énergétique de la marche, on adopte les quatre hypothèses suivantes lors de la phase du double contact :

- Le buste est animé d'un mouvement de translation quasi-uniforme, de vitesse moyenne $\vec{v}_{dc} \approx v_{dc} \vec{e}_x$, avec $v_{dc} = \frac{p}{\tau_{dc}}$ (la composante verticale de v_{dc} est négligée).
 - Les variations d'énergie potentielle de pesanteur de (j_d) et de (j_g) sont négligées.
 - Les variations d'énergie cinétique de (j_d) et de (j_g) sont supposées égales.
 - Le mouvement de rotation de (j_d) autour de O_{dy} s'effectue à vitesse angulaire variable $\Omega(t)$, avec $\Omega(t=0) = 0$.
5. On note $h = z_{G_b(\tau_{dc})} - z_{G_b(0)}$ la variation d'altitude du point G_b entre les instants de dates $t = 0$ et $t = \tau_{dc}$ (figure 3a). Exprimer la variation $\Delta\mathcal{E}$ de l'énergie mécanique de (Σ) entre ces deux instants, en fonction de J_O , $\Omega(\tau_{dc})$, m_b , g et h .

I.3 Coût énergétique optimal de la marche ordinaire

6. En supposant quasi-constante la puissance $\mathcal{P}$ fournie par les muscles pendant la phase de double contact, on évalue $\mathcal{P}$ par $\mathcal{P} = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\tau_{dc}}$.
Rappeler l'énoncé du théorème de la mécanique dont découle cette relation d'évaluation de $\mathcal{P}$.
7. Avec $h \approx \frac{p^2}{2l_j}$ (expression approchée de h valable pour les petits angles θ_a) et en supposant des conditions de marche telles que $\Omega(\tau_{dc}) = \omega_{os}$, avec ω_{os} la pulsation trouvée à la question 4, montrer que

$$\mathcal{P} = \left(\frac{J_O m_j \Delta}{J_F p} + \frac{m_b p}{2l_j} \right) g v_{dc} \quad (1)$$

8. Obtenir l'expression du pas p_{opt} qui minimise $\mathcal{P}$.
9. Application numérique : avec $l_j = 1$ m, $m_j = 10$ kg, $m_b = 60$ kg, calculer p_{opt} dans le cas d'une jambe à répartition de masse uniforme, pour laquelle on a alors $\Delta = l_j/2$ et $J_O = J_F$.

I.4 Pas optimal avec des échasses

Soit maintenant un berger monté sur ses échasses. Chacune d'elles est modélisée comme une tige de masse négligeable, de longueur l^* , solidarisée à la jambe et formant avec elle une "jambe équivalente" de longueur $l_j + l^*$. On note E le point de contact entre le sol et l'échasse et J_E^* le moment d'inertie, par rapport à l'axe E_y , de la "jambe équivalente".

10. Parmi les paramètres intervenant dans l'expression de p_{opt} obtenu à la question 8, indiquer lesquels sont inchangés par rapport au cas sans échasses et lesquels sont à modifier. On précisera ces modifications.

11. En déduire l'expression de p_{opt}^* puis donner le rapport $\frac{p_{opt}^*}{p_{opt}}$ en fonction de $\frac{J_E^*}{J_O}$ et de $\frac{l^*}{l_j}$.

Dans la table 1 figurent les expressions des moments d'inertie d'une jambe à répartition de masse uniforme, sans ou avec échasse.

	Jambe seule (contact avec le sol en O)	Jambe avec échasse (contact avec le sol en E)
Moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation au sol	$J_O = \frac{m_j}{3} l_j^2$	$J_E^* = \frac{m_j}{3} (l_j^2 + 3l^* l_j + 3l^{*2})$

TABLE 1 – Moments d'inertie dans le cas d'une jambe à répartition de masse uniforme.

12. Exprimer $\frac{p_{opt}^*}{p_{opt}}$ en fonction du seul rapport $\frac{l^*}{l_j}$ dans le cas d'une jambe à répartition de masse uniforme.
13. Calculer $\frac{p_{opt}^*}{p_{opt}}$ pour une longueur de jambe $l_j = 1$ m, et des échasses de longueur $l^* = 1$ m.
14. Justifier si la durée de la phase oscillante est changée avec les échasses.
15. Des études statistiques ont montré, qu'une fois le pas optimal adopté, la vitesse moyenne de déplacement horizontal du marcheur sur un cycle est proportionnelle au pas optimal et à la pulsation de la phase oscillante. En déduire le rapport $\frac{v^*}{v}$ des vitesses de déplacement du marcheur avec et sans échasses. Commenter.

II. Le synchrotron (Centrale PC 2013)

Ce problème a pour but d'étudier le rayonnement émis par des particules élémentaires chargées dans un accélérateur synchrotron.

La première partie étudie une méthode d'accélération des particules, avant leur injection dans l'anneau de stockage, ainsi que l'influence du rayonnement sur cette accélération. La deuxième partie étudie à proprement parler le rayonnement synchrotron émis par les particules dans l'anneau de stockage le long duquel elles sont guidées par un champ magnétique.

Bien qu'il soit question dans ce problème de particules allant à des vitesses proches de la vitesse de la lumière (particules relativistes voire ultra-relativistes), il est demandé d'utiliser les lois de la mécanique classique (non relativiste). Chaque fois que cela est nécessaire, l'énoncé indiquera la correction qu'il convient d'appliquer au résultat obtenu pour tenir compte des effets relativistes. De plus, on négligera systématiquement le poids des particules devant les autres forces.

Valeurs numériques

Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Charge élémentaire	$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$

II.1 Injecteur

Pour faire circuler des électrons dans l'anneau de stockage d'un synchrotron, où ils seront guidés le long de trajectoires circulaires grâce à un champ magnétique, il faut préalablement les accélérer.

On considère une cavité accélératrice linéaire formée de deux plaques fines et conductrices de grandes dimensions transversales en $x = 0$ et en $x = d$, auxquelles on applique une différence de potentiel constante

$U = V(d) - V(0) > 0$ de telle sorte que règne dans l'espace entre les plaques un champ électrostatique uniforme :

$$\vec{E}_0 = -E_0 \vec{e}_x = -\frac{m}{e} \alpha \vec{e}_x \quad (1)$$

où m est la masse de l'électron, e la charge élémentaire ($q_{\text{électron}} = -e$) et α une constante caractérisant l'intensité du champ électrique appliqué.

1. Déterminer l'expression de α en fonction de e , m , U et d .

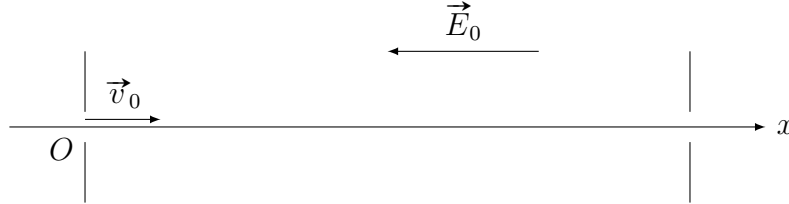


FIGURE 1 – Schéma de la cavité

Les plaques sont percées le long de l'axe (Ox) pour permettre aux électrons d'entrer (en $x = 0$) et de sortir (en $x = d$) de la cavité accélératrice.

Un électron entre dans la cavité accélératrice avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ à $t = 0$.

2. Déterminer, en négligeant le rayonnement d'énergie électromagnétique par l'électron accéléré, le temps T que met l'électron à traverser la cavité ainsi que sa vitesse de sortie v_1 . On donnera les résultats en fonction de v_0 , α et d .

Le rayonnement d'énergie électromagnétique dû à l'accélération de l'électron modifie son mouvement dans la cavité : il met un temps T' pour franchir la cavité et ressort avec une vitesse v'_1 .

On voudrait déterminer v'_1 . Pour cela, compte tenu du faible effet lié au rayonnement, on fait les hypothèses suivantes :

- On utilise la formule de Larmor pour évaluer la puissance rayonnée par l'électron :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} e^A c^B a^2 = m\tau a^2 \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

en prenant pour l'accélération a celle obtenue en négligeant l'effet dû au rayonnement (c'est-à-dire celle correspondant à la situation de la question précédente) ;

- On considère qu'au premier ordre dans l'évaluation de v'_1 on peut assimiler le temps que met l'électron à traverser la cavité à T ; on posera donc $T' \approx T$.

3. Déterminer par analyse dimensionnelle, les exposants A et B .
4. Effectuer un bilan énergétique entre l'entrée et la sortie de l'électron, afin de déterminer v'_1 . On écrira le résultat sous la forme

$$v'_1 \approx v_1 - k \frac{T}{v_1} \quad (3)$$

Exprimer la constante k en fonction de α et τ (τ est défini par l'équation 2 et α par l'équation 1) et donner la dimension de τ .

II.2 Anneau de stockage

L'électron est ensuite injecté (au point O) dans une région où règne un champ magnétique statique uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

À $t = 0$ (nouvelle origine des temps) sa vitesse $\vec{v}'_1$, notée ici $\vec{v}_0$, est perpendiculaire au champ magnétique, donc dans le plan xOy , et colinéaire à $\vec{e}_x$ conformément à la figure 2.

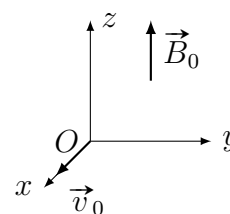


FIGURE 2

5. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, montrer que si l'on néglige le rayonnement de l'électron, son énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ est constante.
6. En négligeant tout phénomène lié au rayonnement de l'électron, on admettra que la trajectoire de l'électron est circulaire dans le plan xOy . Déterminer, en fonction de v_0 et de la pulsation cyclotron $\omega_c = eB_0/m$, l'expression du rayon R_0 du cercle et déterminer les coordonnées de son centre C .

Du fait du rayonnement émis par l'électron accéléré par le champ magnétique B_0 son énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ décroît au cours du temps. Cet effet étant faible, on peut dans la formule de Larmor pour la puissance rayonnée $\mathcal{P}$ donnée par l'équation 2 remplacer l'accélération a de l'électron par celle obtenue en ne tenant compte que de l'action du champ magnétique.

7. Déterminer, en fonction de e , B_0 , ε_0 , c , m et $\mathcal{E}_c$, la puissance $\mathcal{P}$ rayonnée par l'électron.
8. Montrer que $\mathcal{E}_c$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique en fonction du temps en faisant apparaître un temps caractéristique τ_0 de décroissance de cette énergie.

On considère un électron d'un faisceau synchrotron magnétiquement guidé le long d'une trajectoire circulaire de rayon R_0 (il ne passe plus dans une cavité accélératrice). Sur un tour, l'énergie $\delta\mathcal{E}$ perdue par cet électron est faible et la norme v de sa vitesse quasi-constante.

9. Exprimer, en fonction de v et R_0 , la norme a de l'accélération de l'électron puis déterminer l'énergie $\delta\mathcal{E}$ rayonnée par l'électron sur un tour.

On veut évaluer l'énergie perdue par rayonnement d'un électron, sur un tour, dans le cas du synchrotron à électrons SOLEIL de Saclay de rayon $R_0 \simeq 56$ m.

Pour cela on doit tenir compte du fait que la vitesse d'un électron du faisceau est ultra-relativiste (sa vitesse est très proche de celle de la lumière dans le vide) ce qui modifie le calcul de la puissance rayonnée. Dans le cas d'une orbite circulaire, l'expression de l'énergie $\delta\mathcal{E}$ rayonnée par un électron sur un tour reste simple : on trouve le résultat de la question précédente multiplié par le coefficient γ^4 , où γ est le facteur de Lorentz :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4)$$

10. Pour un faisceau d'électrons ultra-relativistes dont la vitesse vaut 99,999 998 3 % de la vitesse de la lumière, circulant dans le synchrotron SOLEIL, calculer γ .
11. Calculer l'énergie $\delta\mathcal{E}$ (en keV) perdue par tour et par électron.
12. Calculer le temps T_0 mis par un électron pour effectuer un tour complet de l'anneau de stockage. En déduire le temps $\tau_{10\%}$ au bout duquel le faisceau aura perdu 10 % de son énergie sachant que son énergie nominale est de $E_0 = 2,75$ GeV. On considérera que l'énergie perdue par tour par un électron est constante et égale à celle calculée à la question précédente. Commenter.

III. Système à deux pistons

On étudie le dispositif représenté sur la figure 1. Les deux cylindres horizontaux, remplis d'un gaz parfait, sont munis de pistons mobiles sans frottements d'aires respectives S et $2S$, reliés par une tige horizontale rigide dont on négligera la section. On considère que l'ensemble reste en permanence en équilibre thermique avec l'atmosphère extérieure, de pression p_e et de température T_e .

L'état initial $t = 0$ est un état d'équilibre caractérisé par $V_1 = V_2 = V_0$ et $p_1 = p_2$.

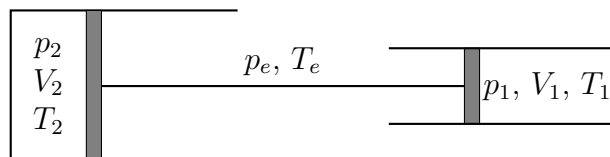


FIGURE 1 – Schéma du système étudié.

1. Que peut-on dire des températures T_1 et T_2 ?
2. Déterminer une relation entre p_1 , p_2 et p_e lorsque le système est à l'équilibre. En déduire les expressions de p_1 et p_2 à l'instant initial.
3. On note $V_1(x)$ et $V_2(x)$ les volumes des deux enceintes lorsque l'ensemble des pistons est déplacé de x vers la droite. Exprimer $V_1(x)$ et $V_2(x)$ en fonction de V_0 , x et S .

Depuis l'état d'équilibre initial, la pression extérieure est portée à $p'_e = 2p_e$.

4. Dans quel sens l'ensemble des deux pistons sera-t-il déplacé pour atteindre un nouvel état d'équilibre. Justifier la réponse sans faire de calcul.
5. On note $x_1 = X_1 \frac{V_0}{S}$ la distance algébrique dont l'ensemble des pistons sera déplacé à l'équilibre. Déterminer la valeur numérique de X_1 .

Depuis l'état d'équilibre initial, la température extérieure est portée à $T'_e = 2T_e$.

6. Dans quel sens l'ensemble des deux pistons sera-t-il déplacé pour atteindre un nouvel état d'équilibre. Justifier la réponse sans faire de calcul.
7. On note $x_2 = X_2 \frac{V_0}{S}$ la distance algébrique dont l'ensemble des pistons sera déplacé à l'équilibre. Déterminer la valeur numérique de X_2 .

