

Particules chargées, solides en rotation, thermodynamique

I. La marche du berger landais sur échasses (CCINP 2024)

I.1 Étude de la phase d'oscillation gauche

I.1 La seule force de moment non nul s'appliquant à la jambe est le poids. On peut déterminer son moment par rapport à $(F_g y)$ en utilisant la méthode du bras de levier. La longueur du bras de levier est $d = \Delta \sin(\theta)$ et le moment vaut $\mathcal{M}_{F_g y}(\vec{P}) = -\Delta m_j g \sin(\theta)$.

En appliquant le TMC à la jambe gauche dans le référentiel du buste qui est supposé galiléen, on a $J_F \ddot{\theta} = -\Delta m_j g \sin(\theta)$, soit :

$$\ddot{\theta} + \frac{\Delta m_j g}{J_F} \sin(\theta) = 0. \quad (1)$$

I.2 Des oscillations isochrones sont des oscillations dont la période ne dépend pas de l'amplitude.

I.3 Dans l'approximation des petits angles, on peut remplacer $\sin(\theta)$ par θ et on obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique : le mouvement est donc bien isochrone.

I.4 On trouve, par identification avec l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, $\omega_{os} = \sqrt{\frac{\Delta m_j g}{J_F}}$.

La durée de la phase d'oscillation correspond à une demi-période, soit $\tau_{os} = \pi \sqrt{\frac{J_F}{\Delta m_j g}}$.

I.2 Etude de la phase de double contact

I.5 La variation d'énergie mécanique est égale à la somme de la variation d'énergie cinétique ΔE_c et de la variation d'énergie potentielle.

La variation d'énergie cinétique de la jambe droite est : $\Delta E_{Cd} = \frac{1}{2} J_O \Omega^2 (\tau_{dc})$ et la variation d'énergie cinétique de la jambe gauche est $\Delta E_{Cg} = \Delta E_{Cd}$.

La variation d'énergie potentielle est $\Delta E_p = m_b g h$.

Donc finalement, $\Delta \mathcal{E} = J_O \Omega^2 (\tau_{dc}) + m_b g h$.

I.3 Coût énergétique optimal de la marche ordinaire

I.6 Le théorème de la puissance mécanique indique que $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est la puissance des forces non conservatives (ici limitées à la puissance des muscles).

I.7 On remplace :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\tau_{dc}} \left(J_O \frac{\Delta m_j g}{J_F} + m_b g \frac{p^2}{2l_j} \right)$$

Soit, en utilisant $\tau_{dc} = p/v_{dc}$,

$$\mathcal{P} = g v_{dc} \left(\frac{J_O \Delta m_j}{J_F p} + \frac{p m_b}{2l_j} \right) \quad (2)$$

NB : l'hypothèse $\Omega(\tau_{dc}) = \omega_{os}$ paraît pour le moins discutable, la vitesse angulaire maximale de l'autre jambe pendant la phase d'oscillation étant $\omega_{os}\theta_a$, alors qu'elle parcourt un angle deux fois plus grand pendant ce temps.

I.8 On dérive l'expression de la puissance obtenue à la question précédente :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dp} = gv_{dc} \left(-\frac{J_0 m_j \Delta}{J_F p^2} + \frac{m_b}{2l_j} \right)$$

La dérivée s'annule pour $p_{opt} = \sqrt{\frac{2J_0 m_j \Delta l_j}{J_F m_b}}$.

I.9 On a alors $p_{opt} = 41 \text{ cm}$

I.4 Pas optimal avec des échasses

I.10 Parmi les paramètres qui interviennent dans l'expression de p_{opt} , m_j , Δ , J_F et m_b sont inchangés et on doit faire les modifications : l_j devient $l_j + l^*$ et J_O devient J_E^* .

I.11 On en déduit la nouvelle expression du pas optimal $p_{opt}^* = \sqrt{\frac{2J_E^* m_j \Delta (l_j + l^*)}{J_F m_b}}$ et on a $\frac{p_{opt}^*}{p_{opt}} = \sqrt{\frac{J_E^*}{J_O} \left(1 + \frac{l^*}{l_j} \right)}$

I.12 D'après les expressions données dans le tableau, on a $\frac{J_E^*}{J_O} = 1 + 3\frac{l^*}{l_j} + 3\left(\frac{l^*}{l_j}\right)^2$. Donc on obtient

$$\frac{p_{opt}^*}{p_{opt}} = \sqrt{\left(1 + 3\frac{l^*}{l_j} + 3\left(\frac{l^*}{l_j}\right)^2 \right) \left(1 + \frac{l^*}{l_j} \right)} \quad (3)$$

I.13 L'application numérique donne $\frac{p_{opt}^*}{p_{opt}} = 3,7$

I.14 L'ajout de l'échasse ne change rien pour la rotation par rapport à l'axe (Fy) (même moment d'inertie et distance du centre de gravité) donc la durée de la phase oscillante ne change pas avec les échasses

I.15 Comme ω_{os} est inchangée avec les échasses, on a $\frac{v^*}{v} = \frac{p_{opt}^*}{p_{opt}} = 3,7$. Les échasses permettent donc d'augmenter significativement la vitesse du berger.

II. Le synchrotron (Centrale PC 2013)

II.1 Injecteur

II.1 On a $\vec{E}_0 = -\frac{U}{d} \vec{e}_x = -\frac{m}{e} \frac{eU}{md} \vec{e}_x$. Donc $\alpha = \frac{eU}{md}$

II.2 Pour déterminer le temps que met l'électron à traverser la cavité, on lui applique le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel du laboratoire que l'on considère galiléen. On a alors $m\vec{a} = \vec{F} = -e\vec{E}_0 = m\alpha \vec{e}_x$ car la seule force appliquée est la force électrostatique.

On obtient donc $\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x = \alpha \vec{e}_x$. En intégrant cette équation une première fois, on obtient $\dot{x} = \alpha t + A$. Comme la vitesse initiale est v_0 suivant l'axe $\vec{e}_x$, on obtient $A = v_0$ et $\dot{x} = v_0 + \alpha t$.

On intègre une seconde fois pour obtenir la position de l'électron en fonction du temps : $x(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + v_0 t + B$. Comme on a pris l'origine à l'entrée de la cavité, on a $B = 0$ et $x(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + v_0 t$.

On trouve le temps mis par l'électron pour traverser la cavité en résolvant l'équation $x(T) = d$. Soit $\frac{1}{2}\alpha T^2 + v_0 T = d$. On trouve finalement

$$T = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2\alpha d}}{\alpha} = \frac{v_0}{\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{2\alpha d}{v_0^2}} - 1 \right) \quad (1)$$

La vitesse en sortie de cavité est $v_1 = v_0 + \alpha T$, soit

$$v_1 = v_0 \sqrt{1 + \frac{2\alpha d}{v_0^2}} \quad (2)$$

II.3 On fait une analyse dimensionnelle en utilisant les unités. On supprime les facteurs sans unité et on obtient l'équation suivante

$$[\mathcal{P}\varepsilon_0] = [e]^A [c]^B [a]^2 = C^A m^B s^{-B} m^2 s^{-4} \quad (3)$$

En utilisant l'énergie stockée dans un condensateur $E_c = \frac{1}{2}CU^2$, on obtient $[E] = [\mathcal{P}][t] = FV^2$. On peut donc transformer l'unité de $\mathcal{P}$: $[\mathcal{P}] = FV^2 s^{-1}$ et on obtient l'unité du membre de gauche de notre équation : $[\mathcal{P}\varepsilon_0] = F^2 V^2 s^{-1} m^{-1}$.

En utilisant l'équation $Q = CU$ reliant la charge portée par un condensateur et la tension à ses bornes, on a $FV = C$ et on obtient l'équation :

$$C^2 s^{-1} m^{-1} = C^A m^B s^{-B} m^2 s^{-4} \quad (4)$$

ce qui donne immédiatement $A = 2$, et $B = -3$

II.4 La variation d'énergie cinétique de l'électron entre l'entrée et la sortie de la cavité est égale à l'énergie fournie à l'électron par la cavité. La force électrostatique fournit une énergie (travail) positive $E_e = eU$. Le rayonnement fournit une énergie négative, comme l'accélération de l'électron est constante et vaut α , l'énergie fournie par le rayonnement à l'électron est $E_r = -\mathcal{P}T' = -\mathcal{P}T = -m\tau\alpha^2 T$. On obtient donc l'équation suivante :

$$\frac{1}{2}mv_1'^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \underbrace{eU}_{\frac{1}{2}mv_1^2} - m\tau\alpha^2 T \quad (5)$$

Donc on a finalement

$$v_1' = \sqrt{v_1^2 - 2\tau\alpha^2 T} = v_1 \sqrt{1 - \frac{2\tau\alpha^2 T}{v_1^2}} \approx v_1 \left(1 - \frac{\tau\alpha^2 T}{v_1^2} \right) = v_1 - \frac{\tau\alpha^2}{v_1} T \quad (6)$$

Ce qui correspond à l'équation demandée avec $k = \tau\alpha^2$. D'après l'équation obtenue, k est en $m^2 s^{-3}$, et α est une accélération en $m s^{-2}$, on en conclut que τ est un temps.

II.2 Anneau de stockage

II.5 D'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'électron dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on a $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = P(\vec{F})$ (puissance de la force magnétique appliquée à l'électron).

Comme la force magnétique $\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}_0$ est orthogonale à $\vec{v}$, sa puissance est nulle et on a

$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = 0$. Donc l'énergie cinétique de l'électron est constante.

II.6 Comme l'énergie cinétique de l'électron est constante, sa vitesse est constante et la trajectoire est circulaire uniforme. L'accélération de l'électron dans le référentiel du laboratoire s'écrit alors en coordonnées polaires $\vec{a} = -\frac{v_0^2}{R_0} \vec{e}_r$. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron permet d'obtenir

$$m\vec{a} = -m\frac{v_0^2}{R_0}\vec{e}_r = -ev_0\vec{e}_\theta \wedge B_0\vec{e}_z = -ev_0B_0\vec{e}_r. \quad (7)$$

On obtient donc finalement $R_0 = \frac{v_0 m}{B_0 e} = \frac{v_0}{\omega_c}$

En traçant le cercle de rayon R_0 dans le plan (Oxy) en partant du point O , on détermine que le centre du cercle doit se trouver en $C(0, R_0)$. (On voit que si $B_0 > 0$, l'électron est dévié vers les $y > 0$)

II.7 On a déterminé à la question précédent que l'accélération de la particule sur la trajectoire circulaire s'écrit $a = \frac{v_0^2}{R_0}$. On injecte cette expression dans la formule de Larmor et on obtient la puissance rayonnée par l'électron :

$$\mathcal{P} = \frac{2e^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \frac{v_0^4}{R_0^2} = \frac{2e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\epsilon_c^2}{m^2 R_0^2} = \frac{2e^4}{3\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\epsilon_c^2 B_0^2}{m^4 v_0^2} = \frac{B_0^2 e^4}{3\pi\epsilon_0 c^3 m^3} \epsilon_c \quad (8)$$

II.8 On a d'après le théorème de l'énergie cinétique

$$\mathcal{P} = -\frac{d\epsilon_c}{dt} = \frac{B_0^2 e^4}{3\pi\epsilon_0 c^3 m^3} \epsilon_c \quad (9)$$

ϵ_c est donc solution de l'équation différentielle

$$\frac{d\epsilon_c}{dt} + \underbrace{\frac{B_0^2 e^4}{3\pi\epsilon_0 c^3 m^3}}_{1/\tau_0} \epsilon_c = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d\epsilon_c}{dt} + \frac{1}{\tau_0} \epsilon_c = 0 \quad (10)$$

La résolution de cette équation différentielle donne $\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2}mv_0^2 e^{-t/\tau_0}$

II.9 On a déjà vu à la question précédente que $a = \frac{v_0^2}{R_0}$. On considère que la puissance perdue sur un tour est constante, et donc l'énergie perdue sur un tour est $\delta\mathcal{E} = \mathcal{P}T$ où $T = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi R_0}{v}$. Avec $\mathcal{P} = m\tau a^2$ on obtient

$$\delta\mathcal{E} = \frac{e^2 v^3}{3\epsilon_0 R_0 c^3} \quad (11)$$

II.10 En utilisant autant de chiffres significatifs que l'énoncé, on trouve $\gamma = 5,423\,261\,469 \times 10^3$

II.11 L'application donne une énergie $\delta\mathcal{E} = 1,49 \times 10^{-14} \text{ J} = 93,2 \text{ keV}$.

II.12 Le temps mis par un électron pour faire un tour de l'anneau de stockage est $T_0 = \frac{2\pi R_0}{v} = 1,17 \times 10^{-6} \text{ s}$. Pour perdre 10 % de son énergie, l'électron devra perdre $0,1E_0$ où E_0 est l'énergie nominale de l'électron. Le nombre de tour correspondant est $N = \frac{0,1E_0}{\delta\mathcal{E}} = 2951 \text{ tours}$. Ce qui prendra un temps $\tau(10\%) = N \frac{2\pi R_0}{v} = 3,46 \text{ ms}$. Ce temps est très court, ce qui signifie que l'électron va très vite perdre son énergie si on ne lui en redonne pas régulièrement, il faut mettre des cavités accélératrices dans l'anneau de stockage.

III. Système à deux pistons

III.1 Comme les deux cylindres sont à l'équilibre thermique avec le milieu extérieur, leurs températures sont toujours égales à celle du milieu extérieur $T_1 = T_2 = T_e$.

III.2 Lorsque le système est à l'équilibre, l'ensemble constitué des pistons est à l'équilibre et donc la somme des forces qui s'appliquent dessus est nulle (car on suppose que le référentiel du laboratoire dans lequel on étudie le système est galiléen).

On oriente un axe x par un vecteur directeur $\vec{e}_x$ dirigé horizontalement vers la droite. Les forces exercées sur le piston de gauche sont

- La force de pression du gaz : $\vec{F}_{g2} = p_2 \times 2S \vec{e}_x$;
- la force de pression du milieu extérieur $\vec{F}_{e2} = -p_e \times 2S \vec{e}_x$.

Les forces qui s'exercent sur le piston de droite sont :

- La force de pression du gaz : $\vec{F}_{g1} = -p_1 \times S \vec{e}_x$;
- la force de pression du milieu extérieur $\vec{F}_{e1} = p_e \times S \vec{e}_x$.

On a alors $\vec{F}_{g1} + \vec{F}_{g2} + \vec{F}_{e1} + \vec{F}_{e2} = \vec{0}$ soit $(p_e - p_1)S + 2(p_2 - p_e)S = 0$ et finalement $2p_2 - p_1 = p_e$. Comme initialement $p_1 = p_2$, alors on a $p_1 = p_2 = p_e$.

III.3 Lorsque les pistons se déplacent de x vers la droite, on retire un volume xS au cylindre de droite et on ajoute un volume $x \times 2S$ au cylindre de gauche. On a donc $V_1(x) = V_0 - xS$ et $V_2(x) = V_0 + 2xS$.

III.4 Lorsqu'on augmente la pression extérieure, on augmente la force exercée sur les deux pistons. Comme le piston de gauche a une surface supérieure à celle du piston de droite, la force supplémentaire exercée sur le piston de gauche sera supérieure à celle exercée sur le piston de droite et l'ensemble va être déplacé vers la gauche.

III.5 On commence par exprimer les pressions à l'aide de l'équation d'état des gaz parfaits :

$$p_1 = \frac{n_1 R T_e}{V_1} = \frac{n_1 R T_e}{V_0 - xS} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{n_2 R T_e}{V_2} = \frac{n_2 R T_e}{V_0 + 2xS} \quad (1)$$

L'équation d'état des gaz parfaits donne à l'instant initial

$$p_e = \frac{n_1 R T_e}{V_0} = \frac{n_2 R T_e}{V_0} \quad \text{donc} \quad n_1 R T_e = n_2 R T_e = p_e V_0 \quad (2)$$

En substituant dans les équations précédentes, on obtient

$$p_1 = \frac{p_e V_0}{V_0 - xS} = p_e \frac{1}{1 - \frac{xS}{V_0}} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{p_e V_0}{V_0 + 2xS} = p_e \frac{1}{1 + 2\frac{xS}{V_0}} \quad (3)$$

L'équation satisfaite par les pressions obtenues à la question 2, donne alors pour x_1 :

$$2p_2 - p_1 = p'_e = 2p_e \quad \text{soit} \quad \frac{2p_e}{1 + 2\frac{x_1 S}{V_0}} - \frac{p_e}{1 - \frac{x_1 S}{V_0}} = 2p_e \Leftrightarrow \frac{2}{1 + 2X_1} - \frac{1}{1 - X_1} = 2 \quad (4)$$

On obtient finalement l'équation $2(1 - X_1) - (1 + 2X_1) = 2(1 + 2X_1)(1 - X_1)$, soit $4X_1^2 - 6X_1 - 1 = 0$. Les solutions de cette équation sont $X_1 = \frac{-6 \pm \sqrt{52}}{8}$. Comme on a vu à la question précédente que l'ensemble est déplacé vers la gauche, la solution à retenir est

$$X_1 = \frac{6 - \sqrt{52}}{8} = -0,15 \quad (5)$$

III.6 Considérons que l'ensemble formé par les deux pistons est fixé. Si on multiplie par deux la température extérieure, alors les températures des gaz dans les deux cylindres seront multipliées par 2 et les pressions dans les deux cylindres vont aussi être multipliées par deux. Comme le piston de gauche a une surface plus grande, la force supplémentaire exercée par le gaz de gauche sera plus grande que celle exercée par le gaz de droite et si on lâche les pistons, ils seront déplacés vers la droite.

III.7 On procède exactement de la même manière que dans la question 5, en remplaçant T_e par $2T_e$ dans l'équation 1, l'équation 3 devient alors

$$p_1 = \frac{2p_e}{1 - \frac{x_1 S}{V_0}} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{2p_e}{1 + 2\frac{x_2 S}{V_0}} \quad (6)$$

L'équation satisfaite par les pressions obtenues à la question 2, donne alors pour x_2 :

$$2p_2 - p_1 = p_e \quad \text{soit} \quad \frac{4p_e}{1 + 2\frac{x_2 S}{V_0}} - \frac{2p_e}{1 - \frac{x_2 S}{V_0}} = p_e \Leftrightarrow \frac{4}{1 + 2X_2} - \frac{2}{1 - X_2} = 1 \quad (7)$$

On obtient finalement l'équation $4(1 - X_2) - 2(1 + 2X_2) = (1 + 2X_2)(1 - X_2)$, soit $2X_2^2 - 9X_2 + 1 = 0$. Les solutions de cette équation sont $X_2 = \frac{9 \pm \sqrt{73}}{4}$. Les deux valeurs possibles sont positives, mais vu les expressions des volumes des deux compartiments, on doit avoir $-\frac{1}{2} < X_2 < 1$. On retient donc la solution avec un "−" soit

$$X_2 = \frac{9 - \sqrt{73}}{4} = 0,11$$

(8)

