

DM8 : Particules chargées et solide en rotation

Exercice 1 : ACCÉLÉRATEUR DE PARTICULES

Un moyen d'arriver à avoir une accélération avec une tension élevée à l'aide de plusieurs tubes est d'utiliser un accélérateur de Wideröe. Les protons produits au niveau de la source (avec une vitesse quasi-nulle), traversent des tubes de cuivre reliés à l'une ou à l'autre des bornes du générateur représenté sur la figure 1.

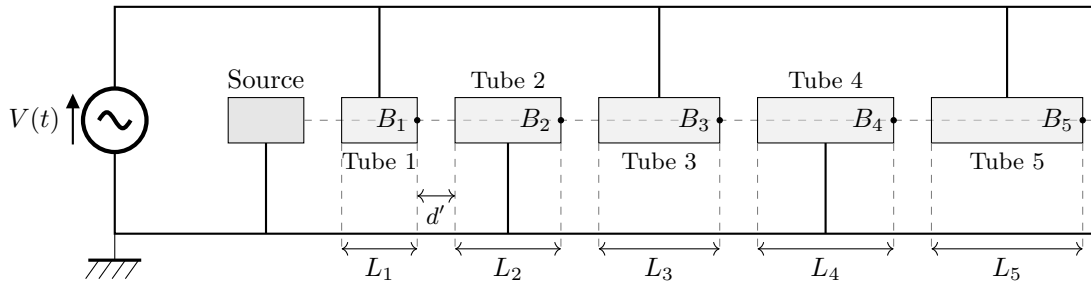


FIGURE 1 – Accélérateur de Wideröe

La tension délivrée par le générateur est : $V(t) = -V_{\max} \sin(\omega t + \phi)$ avec $V_{\max} = 100 \text{ kV}$ et $0 < \phi < \pi$. On note T la période du signal. Les tubes sont distants de d' . À l'intérieur de chaque tube, le champ électrique est nul ; il est uniforme entre deux tubes consécutifs. On supposera que d' est suffisamment faible, pour que l'on puisse considérer que le proton voit un champ électrique indépendant du temps, entre deux tubes consécutifs.

Le point B_0 est placé à la sortie de la source, les différents points B_i sont placés à la sortie des tubes i pour $i \in \{1..5\}$. On note L_i la longueur du tube i . De même, on note v_i la vitesse au point B_i pour $i \in \{1..5\}$.

1. Quel est le sens du champ électrique entre la source de protons et le premier tube à la date $t = 0$? Représenter alors sur votre copie les vecteurs champs électriques, au même instant, aux points B_0, B_1, B_2, B_3 et B_4 .
On supposera que $\phi = \frac{\pi}{2}$. Quelle est la norme des différents champs électriques ?

2. Même question à la date $t = \frac{T}{2}$.

3. De façon qualitative, quelle relation doivent vérifier la durée τ de parcours d'un tube et la période T pour que les protons soient toujours accélérés au passage d'un tube à l'autre ? Cette relation sera supposée valide dans toute la suite de l'exercice.

4. Exprimer la longueur L_i du $i^{\text{ème}}$ tube en fonction de la vitesse v_i du proton à l'entrée de ce dernier et de T . Les tubes auront-ils tous la même longueur ?

5. Exprimer la vitesse v_{i+1} du proton à l'entrée du tube $i + 1$ en fonction de e , $V_{\max}$, m_p la masse du proton et v_i vitesse du proton en sortie du tube i .

Représenter ensuite en fonction du temps l'allure de la vitesse des protons entre les points B_0 et B_5 .

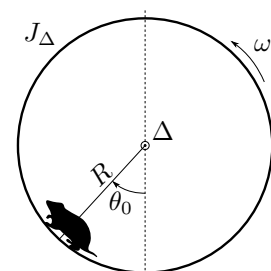
6. Exprimer la longueur L que doit avoir un tube pour une vitesse proche de c , et une fréquence du générateur de tension égale $f = \omega/(2\pi)$. Réaliser ensuite les applications numériques pour $f_a = 1 \text{ MHz}$ et $f_b = 100 \text{ MHz}$. On rappelle la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide : $3,0 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

Justifier alors qu'il est préférable pour des raisons pratiques d'utiliser des fréquences élevées.

7. En supposant que les lois de la mécanique newtonienne restent valable lorsque la vitesse des protons approche c la vitesse de la lumière dans le vide, estimer le nombre de tubes nécessaires à accélérer les protons jusqu'à la vitesse de $0,1c$. On rappelle la masse d'un proton : $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, la charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Exercice 2 : LE HAMSTER

Pour permettre à un hamster domestique de faire de l'exercice, on place dans sa cage une roue que le hamster peut faire tourner en courant. La roue a un rayon R et son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est $J_\Delta = MR^2$ où M est la masse de la roue. La masse du hamster est notée m .



On commence par négliger tous les frottements. On considère également que lors de sa course, le hamster se trouve à une position constante repérée par un angle θ_0 par rapport à la verticale.

1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la roue. Faire un schéma.
2. Quel est le moment cinétique L_Δ de la roue du hamster en fonction de ω
3. À $t = 0$ le hamster commence à courir. Donner l'expression de l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ en fonction de R , θ_0 , m et J_Δ .
4. Donner l'évolution temporelle $\omega(t)$ de la vitesse angulaire de rotation de la roue.
5. Donner l'expression de l'énergie cinétique $E_c(t)$ de la roue en fonction du temps.
6. Un hamster court en moyenne à environ $v_0 = 3 \text{ km/h}$. Calculer le temps qu'il mettra avant d'atteindre sa vitesse de croisière. On donne $R = 10 \text{ cm}$, $m = 100 \text{ g}$, $\theta_0 = 30^\circ$ et $M = 200 \text{ g}$.
7. Calculer l'énergie cinétique de la roue lorsque le hamster a atteint cette vitesse.
8. Expliquer pourquoi lorsque la vitesse de course du hamster est constante on a nécessairement $\theta_0 = 0$.

On prend maintenant en compte les frottements entre la roue et son axe de rotation, ceux-ci produisent un couple résistant dont le moment par rapport à l'axe Δ est Γ_Δ .

9. Montrer que la nouvelle accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ s'écrit :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{mRg \sin \theta_0 - \Gamma_\Delta}{J_\Delta}$$

10. Montrer que dans ces conditions, lorsque le hamster court à vitesse constante, l'angle θ_0 n'est plus nul, donner son expression.

On se pose le problème suivant : **Comment faire subir un looping au Hamster ?** On part d'une situation où le Hamster court dans la roue à sa vitesse de croisière de v_0 , avec un angle $\theta_0 = 0$. Subitement il décide de s'arrêter de courir, on considère qu'il ne glisse alors pas par rapport à la roue qui l'entraîne vers la droite (et le haut). L'étude qui suit est faite dans le référentiel du laboratoire, on néglige à nouveau les frottements entre la roue et son axe de rotation.

11. Exprimer la vitesse de rotation ω_0 de la roue lorsque le hamster court.
12. Juste avant que le hamster ne s'arrête de courir, quelle est son énergie cinétique ? potentielle ? Quelle est l'énergie cinétique de rotation de la roue ? En déduire l'énergie mécanique totale du système {roue+hamster}. On donnera les expressions littérales sans utiliser les valeurs numériques fournies.
13. On considère que l'énergie mécanique du système roue+hamster reste la même lorsque le hamster arrête de courir. Montrer que la vitesse de rotation ω_1 de la roue juste après que le hamster ait arrêté de courir s'exprime comme :

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{J_\Delta}{J_\Delta + mR^2}}$$

14. Justifier pourquoi on peut considérer que l'énergie mécanique du système roue+hamster reste constante au cours du temps. Exprimer cette énergie mécanique en fonction de la vitesse de rotation ω et de l'angle θ dont la roue a tourné.
15. En déduire l'expression de la vitesse de rotation ω de la roue en fonction de l'angle θ dont elle a tourné.
16. Lorsque la roue a tourné de π , le hamster se trouve au point le plus haut. Faire le bilan des forces subies par le hamster à cet instant.
17. Montrer que l'accélération normale subie par le hamster à cet instant peut s'écrire :

$$\vec{a} = -R \left(\omega_1^2 - \frac{2mgR(1 - \cos \theta)}{J_\Delta + mR^2} \right) \vec{e}_r$$

18. Le hamster reste "collé" à la roue et peut faire un looping si la composante normale de la réaction de la roue sur le hamster ne s'annule pas. Avec les valeurs numériques données précédemment, le hamster va-t-il faire un looping ?
19. Comment faudrait-il modifier sa roue pour que le hamster fasse un looping lorsqu'il s'arrête de courir ?