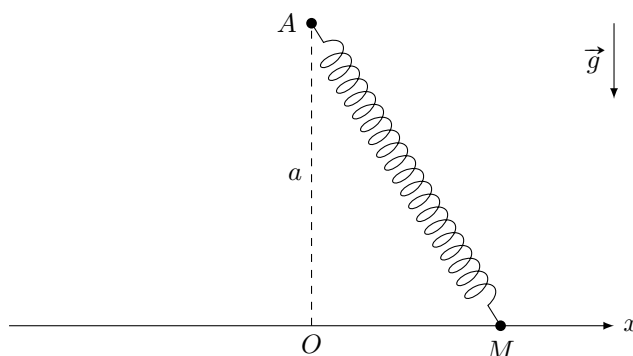


DM7 : Dynamique, énergie

Exercice 1 : OSCILLATEUR DE LANDAU

L'oscillateur de Landau est un modèle théorique permettant de modéliser efficacement des systèmes physiques pour lesquelles des faibles non-linéarités sont à prendre en compte. Il s'agit d'une approximation un peu plus précise que celle de l'oscillateur harmonique pour étudier le comportement de systèmes au voisinage de leur position d'équilibre.

Un exemple de système modèle permettant de réaliser un oscillateur de Landau est un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m , astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige rectiligne horizontale choisie comme axe (Ox) . Cet anneau est relié à un ressort, de longueur à vide l_0 et de raideur k , dont l'autre extrémité est fixée en A . La distance de A à la tige est notée $AO = a$. On note x l'abscisse du point M .



1. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle totale $E_p(x)$ du point M .
2. À l'aide d'un raisonnement qualitatif, montrer que lorsque $l_0 \leq a$ il n'y a qu'une position d'équilibre et lorsque $l_0 > a$ il y en a trois. Donner les abscisses de ces positions d'équilibre en fonction de a et l_0 .
3. Retrouver le résultat précédent par le calcul à partir de l'expression de $E_p(x)$.
4. Déterminer par le calcul la stabilité des positions d'équilibre trouvées à la question précédente.
5. Tracer l'allure de l'énergie potentielle du point M en fonction de x pour $a > l_0$ et pour $a < l_0$.

On s'intéresse maintenant aux oscillations du point M autour de ses positions d'équilibre stables.

6. Déterminer la pulsation des oscillations de M autour de sa position d'équilibre stable lorsque $l_0 < a$ en fonction de k , l_0 et a .
7. Montrer que lorsque $l_0 \ll a$ cette pulsation tend vers une limite ω_l que l'on exprimera en fonction de k et m .
8. Déterminer la pulsation des oscillations de M autour de ses positions d'équilibre stables lorsque $l_0 > a$ en fonction de k , l_0 et a .
9. Montrer que lorsque $l_0 \gg a$ cette pulsation tend vers la même limite ω_l que celle déterminée à la question 7. Expliquer qualitativement pourquoi on pouvait s'attendre à cette valeur de pulsation limite sans faire de calcul.