DS9 : Mécanique, thermodynamique, chimie

— Durée : 4h.
— La calculatrice est autorisée.
— Chaque réponse doit être justifiée.
— Même lorsque ça n'est pas précisé, toute application numérique doit être précédée d'une expression littérale en fonction des données de l'énoncé.

Exercice 1 : Échappement d'un gaz

Cet exercice est constitué de deux parties indépendantes.

On considère un cylindre vertical de section S fermé par un piston horizontal de masse négligeable, se déplaçant sans frottements. Le cylindre est muni d'un robinet (R) dans sa partie inférieure. Sauf indication contraire, le robinet est fermé.

Le cylindre contient n moles d'air, à la température $T_1 = T_0$ (T_0 est la température extérieure au cylindre supposée constante) et à la pression $p_1 = p_0$ (p_0 est la pression atmosphérique supposée constante).

Le piston, les parois du cylindre et le robinet sont supposés être calorifugés.

L'air est considéré comme un gaz parfait dont on note γ le rapport des capacités thermiques $\gamma = C_p/C_v$. On note p, V et T les pression, volume et température du gaz dans un état d'équilibre quelconque. On note R la constante des gaz parfaits.

On donne pour les applications numériques : $S = 1{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}^2$, $n = 0{,}20\,\mathrm{mol}$, $R = 8{,}3\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$, $T_0 = 300\,\mathrm{K}$, $p_0 = 1{,}0\,\mathrm{bar}$, $\gamma = 1{,}4$

On donne également l'expression de la variation d'entropie molaire d'un gaz parfait qui passe d'une température T_1 et d'une pression p_1 à une température T_2 et une pression p_2

$$\Delta S_m = R\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right) \tag{1}$$

I – Compression d'un gaz

1. Définir ce qu'est une grandeur intensive et une grandeur extensive. Pour les variables p, T et V, préciser les variables intensives et les variables extensives.
2. Exprimer le volume initial V_1 de l'air en fonction des données du problème. Calculer V_1.

L'opérateur appuie très lentement sur le piston de manière à amener la pression du gaz à la pression $p_2 = 1{,}5p_1$. On note T_2 et V_2 la température et le volume à l'équilibre.

3. Expliquer pourquoi la transformation subie par le gaz est réversible. Que peut-on dire de l'entropie du gaz au cours de la transformation ?
4. Exprimer la température T_2 en fonction de p_0, p_2, γ et T_0. Calculer la température T_2 et le volume V_2.
5. Exprimer le travail W_{12} reçu par le gaz au cours de la transformation en fonction de n, R, γ, T_0 et T_2. Calculer W_{12}.
6. Calculer la variation d'entropie ΔS_{12} et l'entropie créée S_{c12} au cours de cette transformation.

Le système étant de nouveau dans son état initial (p_1, T_1, V_1), l'opérateur applique brutalement une force de norme F constante sur le piston jusqu'à atteindre un état d'équilibre pour lequel la pression du gaz est égale à $p_2 = 1,5p_1$. On note T_3 et V_3 la température et le volume de cet état d'équilibre.

7. En écrivant l'équilibre mécanique du piston à l'état final, exprimer F en fonction de p_0, p_2 et S. Calculer F.
8. Exprimer le travail W_{13} reçu par le gaz au cours de la transformation en fonction de p_2, V_1 et V_3.
9. Exprimer V_3 en fonction de V_1, γ, p_0 et p_2. Calculer V_3.
10. Calculer la température T_3.
11. Calculer le travail W_{13}. Comparer à W_{12}. Conclure.
12. Exprimer la variation d'entropie ΔS_{13} au cours de la transformation en fonction de n, R, γ, T_3, T_0, p_2 et p_0. Calculer l'entropie créée. Conclure.

II – Échappement

Le système est amené dans un nouvel état d'équilibre. L'opérateur bloque le piston dans une position telle que :

$$V_4 = 2{,}8 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \quad ; \quad T_4 = 300\,\mathrm{K} \tag{2}$$

13. Calculer la pression p_4 du système.

Les parois du cylindre et le robinet étant toujours imperméables à la chaleur, l'opérateur ouvre le robinet pendant un court instant, jusqu'à ce que la pression dans le cylindre soit égale à la pression atmosphérique p_0, puis il referme le robinet. On note n' la quantité de gaz sorti du cylindre au cours de cette transformation. On suppose que cette quantité n' de gaz est aussitôt en équilibre thermique et mécanique avec l'extérieur, à la pression p_0 et la température T_0. Ces n' moles de gaz subissent donc une détente brutale. On suppose que le gaz restant dans le cylindre n'échange pas d'énergie thermique avec l'extérieur.

Après cette transformation, la température du gaz resté dans le cylindre est $T_5 = 276\,\mathrm{K}$.

14. Calculer la quantité de gaz n' qui est sortie du cylindre.
15. Exprimer le travail W_{45} reçu par les n moles de gaz initialement présentes dans le cylindre en fonction de n', R et T_0. Calculer W_{45}.
16. Exprimer puis calculer la variation d'entropie ΔS_{45} des n moles de gaz initialement présentes dans le cylindre au cours de la transformation.
17. Peut-on considérer que la transformation subie par les n moles de gaz est adiabatique ?
18. Calculer l'entropie créée au cours de la transformation. Conclure.

Exercice 2 : Exploitation du diagramme E-pH du chlore

Dans tout l'exercice, on se place à une température de 300 K pour laquelle on pourra faire l'approximation $\frac{RT\ln(10)}{\mathcal{F}} \approx 0{,}06\,\mathrm{V}$. Les autres données numériques se trouvent à la fin de l'énoncé.

I – Diagramme du chlore

La figure 1 donne le diagramme potentiel-pH de l'élément chlore. Les espèces considérées, qui sont toutes en solution, sont Cl_2(aq), Cl^-(aq), HClO(aq) et ClO^-(aq). La concentration de tracé est $c = 1{,}0 \times 10^{-1}\,\mathrm{mol}\,\ell^{-1}$. Les frontières entre deux espèces ont été calculées en traduisant l'égalité des *concentrations molaires en élément* chlore de chaque espèce sur la frontière, la somme de ces concentrations étant égale à c.

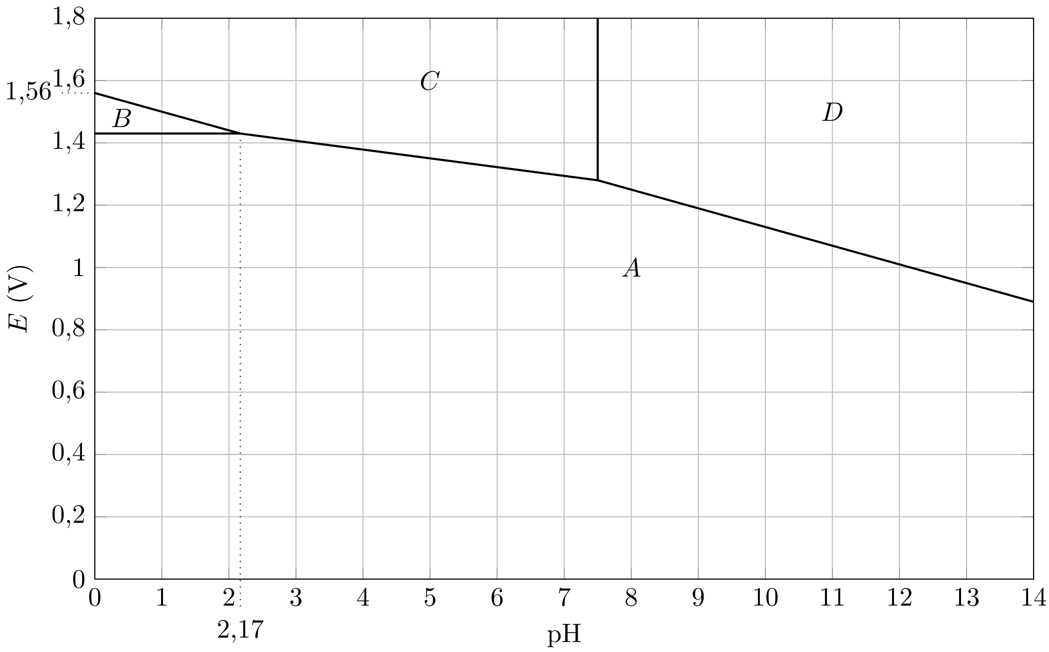

Figure 1 – Diagramme E-pH du chlore

1. Attribuer à chaque espèce, le domaine correspondant.
2. Déterminer le p$K_a$du couple HClO / ClO^-.

3. Déterminer le potentiel standard du couple B/A. On utilisera pour seuls résultats graphiques, les valeurs 2,17 et 1,56).
4. Écrire la demi-équation redox entre les espèces A et C.
5. Déterminer la pente de la frontière C/A et en effectuer la vérification graphique.
6. Déterminer le potentiel standard du couple C/A.

II – Diagramme de l'eau

On considère les espèces H_2O, $O_2(g)$ et $H_2(g)$. La pression de tracé est fixée à 1 bar et la concentration de tracé à $1{,}0\,\mathrm{mol}\,\ell^{-1}$.

7. Déterminer l'équation de la frontière $O_2(g)\,/\,H_2O(\ell)$.
8. Déterminer l'équation de la frontière $H_2O(\ell)\,/\,H_2(g)$.
9. Tracer succinctement sur votre copie l'allure du diagramme potentiel−pH de l'eau superposé à celui du chlore aqueux. Quels commentaires pouvez-vous formuler ?

III – Étude de la cellule d'électrolyse

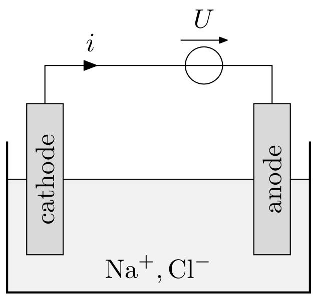

Figure 2 – L'électrolyseur

L'électrolyseur est constitué de deux électrodes en titane. Le schéma de principe est donné figure 2. La tension U et le courant i sont des grandeurs positives. Lors de la mise sous tension de l'électrolyseur, on observe une production de $H_2(g)$ et de $Cl_2(aq)$. L'électrolyseur est placé en amont du système de filtrage de l'eau.

10. Écrire les demi-réactions électroniques des réactions se déroulant à l'anode et à la cathode.

L'eau d'une piscine est maintenue à un pH compris entre 7,0 et 7,4.

11. Écrire l'équation modélisant la réaction chimique qui, à partir de $Cl_2(aq)$ en solution aqueuse, forme $Cl^-(aq)$ et $ClO^-(aq)$.
12. Comment appelle-t-on ce type de réaction ?

On envisage dans la suite une piscine de particulier de contenance $V_0 = 150\,\mathrm{m}^3$.

13. Avant la mise en fonctionnement de l'électrolyseur, l'eau de la piscine doit être salée avec une teneur en sel d'environ $c_s = 5\,\mathrm{g}\,\ell^{-1}$ (on prendra cette valeur pour les applications numériques). Quelle masse de sel le particulier doit-il acheter lors de la première mise en route du dispositif ?

Un fabriquant d'électrolyseurs de piscines annonce, pour un modèle adapté à un volume maximal de bassin de $150\,\mathrm{m}^3$, une production horaire maximale $\left.\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right|_{\max} = 26\,\mathrm{g}\,\mathrm{h}^{-1}$ de Cl_2. Pour ce modèle, $U = 7{,}5\,\mathrm{V}$.

14. Calculer la valeur de i correspondant au fonctionnement maximal. On supposera le fonctionnement idéal.
15. Calculer la puissance correspondant à une production horaire maximale. Commenter le résultat.

Données :

Potentiel standard du couple $O_2(g)/H_2O(\ell)$	$E_1^\circ = 1{,}23\,\mathrm{V}$
Constante de Faraday	$\mathcal{F} = 96\,500\,\mathrm{C}\,\mathrm{mol}^{-1}$
Masse molaire du chlore	$M(\mathrm{Cl}) = 35{,}5\,\mathrm{g}\,\mathrm{mol}^{-1}$

Exercice 3 : Exploration de la planète Mars

Un demi-siècle après avoir marché sur la Lune, l'exploration spatiale semble se fixer à moyen terme l'objectif de l'exploration de la planète Mars par l'homme. Une telle expédition suppose de résoudre un très grand nombre de problèmes concernant aussi bien les aspects techniques que les aspects humains.

Ce sujet propose d'étudier la cohérence de l'un des nombreux scénarios élaborés par la NASA pour un vol habité vers Mars.

Données :

Masse du soleil	$M_S = 2{,}00 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Demi-grand axe de l'orbite de la Terre	$a_T = 150 \times 10^{6}\,\mathrm{km}$
Demi-grand axe de l'orbite de Mars	$a_M = 228 \times 10^{6}\,\mathrm{km}$
Constante gravitationelle	$\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{SI}$
Période de révolution de la Terre	$T_T = 365\,\mathrm{jours}$
Période de révolution de Mars	$T_M = 687\,\mathrm{jours}$

I – Etude préliminaire

I.1 – Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

1. Donner les dimensions de la constante gravitationnelle ainsi que son unité dans le système international.
2. Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O$ en O, centre du Soleil, d'un objet de masse m est une constante du mouvement.
3. On utilise les coordonnées cylindriques $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ avec $\vec{e}_z$ tel que $\vec{L}_0 = L_0 \vec{e}_z$ Justifier que le mouvement est plan et exprimer $C = r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ en fonction de L_0 et m. Quel est le nom de cette grandeur ?
4. Déterminer, dans le cas d'une orbite circulaire de rayon R, la vitesse V de l'objet en fonction de $\mathcal{G}, M_S, R$ et m. Calculer les valeurs numériques de V_T, la vitesse orbitale de la Terre et de V_M , celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique.

I.2 – Aspect énergétique et troisième loi de Kepler

5. Déduire l'expression de l'énergie cinétique, puis de l'énergie mécanique de l'objet de masse m sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de $\mathcal{G}, M_S, R$ et m.
6. Démontrer la troisième loi de Kepler reliant la périonde T de révolution de l'objet au rayon R de son orbite, dans le cas d'une orbite circulaire.

Il est rappelé que les expressions de l'énergie mécanique et de la troisième loi de Kepler obtenues pour un mouvement circulaire peuvent être généralisées au cas d'une orbite elliptique en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe a de la trajectoire.

II – Etude de la trajectoire

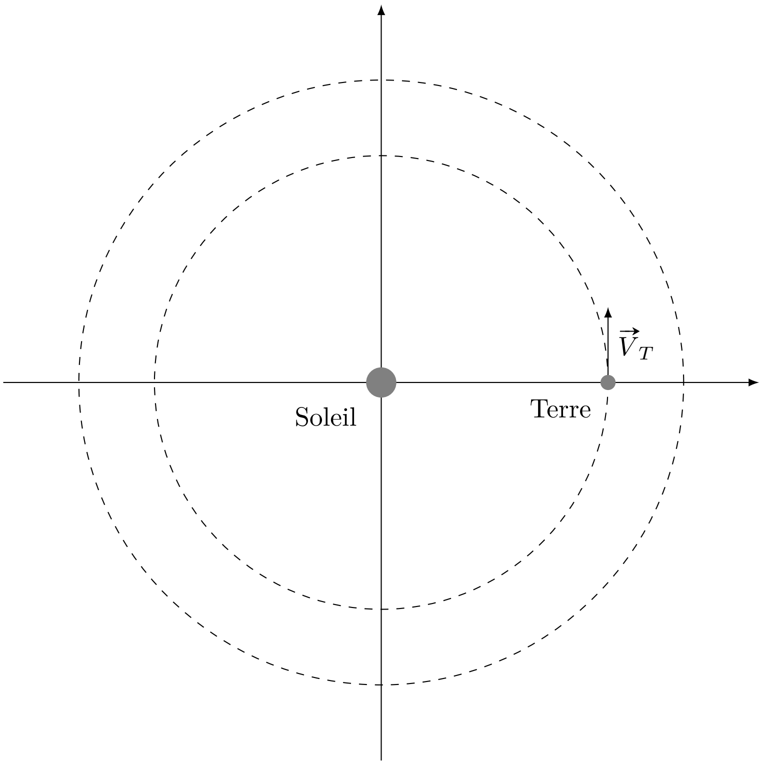

Figure 1 – Représentation des orbites de la Terre de de Mars.

II.1 – Voyage aller Terre - Mars, orbite de transfert

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de Hohmann). On admet que seule l'attraction solaire agit sur le vaisseau pendant son mouvement.

7. Reproduire la figure 1 sur votre copie, montrant les orbites de la Terre et de Mars, l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de Hohmann). La position de la Terre au temps $t = 0$ du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ($\Theta_T(t = 0) = 0$).
8. Au départ de l'orbite de la Terre, démontrer que la vitesse V'_T que doit avoir le vaisseau sur sa trajectoire de transfert s'exprime selon $V'_T = V_T\sqrt{\frac{2a_M}{a_M+a_T}}$. En déduire la variation de vitesse $\Delta V_T = V'_T - V_T$. Calculer la valeur numérique de ΔV_T.

En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.

9. Exprimer puis calculer la durée Δt du voyage jusqu'à l'orbite de Mars.
10. Quel doit être l'angle $\alpha_0 = \theta_M(t = 0) - \theta_T(t = 0)$ (Terre - Soleil - Mars) formé par les directions de Mars et de la Terre, vus du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau ? Calculer la valeur numérique de α_0.
11. Dans l'hypothèse d'un problème survenu pendant le voyage aller nécessitant de ne pas explorer la planète, le vaisseau ne modifie pas sa vitesse lors du passage de l'orbite de Mars. Déterminer la position angulaire de la Terre au bout d'une révolution complète de celui-ci sur son orbite de transfert. Commenter.

II.2 – Durée de la mission

Toujours pour minimiser le cout énergétique, le voyage retour emprunte le même type d'orbite de transfert qu'à l'aller.

12. Déterminer l'angle α_1 (Terre - Soleil - Mars) au moment du départ de Mars, à l'instant t_1, pour que la Terre soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau.
13. En déduire le nombre minimum de jours que les astronautes vont pouvoir passer sur la planète rouge, la durée totale de la mission associée (en jours) et la période entre deux fenêtres de lancement depuis la Terre.

Moyennant une plus grande dépense énergétique, il est possible de modifier ce scénario de mission, et ce en fonction des objectifs voulus (réduction du temps de trajet aller ou retour, modification du temps global de mission en sont des exemples). Ainsi, une variation de vitesse $\Delta\vec{V}_T$ colinéaire à $\vec{V}_T$ plus importante au départ permet de réduire le temps du voyage aller.

Dans la suite, on cherche une réduction de 25 % de l'angle balayé par le vaisseau pour atteindre l'orbite de Mars autour du Soleil. On se place de nouveau avec la position de la Terre au lancement prise comme origine angulaire ($\theta_T(t=0)=0$) et on souhaite que le vaisseau atteigne Mars à un instant $\Delta t'$ tel que $\theta_M(\Delta t')=3\pi/4$. On admet que la nouvelle trajectoire du vaisseau est une conique dont l'un des foyers est le Soleil et d'équation polaire

$$r(\theta)=\frac{p}{1+e\cos(\theta)} \tag{1}$$

où p est appelé paramètre de la conique et e son excentricité.

14. Reproduire une nouvelle fois le schéma de la figure 1 en y faisant apparaître la position de Mars à l'arrivée du vaisseau ainsi que la trajectoire suivie par ce dernier. Cette dernière ne sera pas tangente à la trajectoire de Mars au point d'arrivée.
15. Montrer que l'excentricité s'écrit
$$e=\frac{a_M-a_T}{\frac{a_M}{\sqrt{2}}+a_T} \tag{2}$$
et calculer sa valeur numérique.
16. Exprimer l'énergie mécanique E_m du vaisseau sur cette trajectoire en fonction de m, V_T et e.
17. En déduire la vitesse V_T'' que doit avoir le vaisseau au départ pour se placer sur sa nouvelle orbite, toujours en fonction de V_T et e.
18. Donner, en fonction de V_T et e, la variation de vitesse $\Delta V_T'=V_T''-V_T$ qu'il faut communiquer au vaisseau pour le mettre sur sa nouvelle trajectoire de transfert. Calculer la valeur numérique de $\Delta V_T'$ et vérifier que cette dernière est bien supérieure à ΔV_T
19. Exprimer $C=r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ en fonction de a_T et V_T''.
20. Evaluer le temps $\Delta t'$ du transfert entre la Terre et Mars. On donne
$$\int_0^{\theta_M(\Delta t')}\frac{1}{\left(1+e\cos(\theta)\right)^2}\mathrm{d}\theta=2{,}15 \tag{3}$$
avec l'excentricité e calculée à la question 15