DS1 : Optique, analyse dimensionnelle – corrigé

Exercice 1 : Frottement visqueux

Remarque : La dimension d'une grandeur X sera notée dim(X). On trouve très souvent la notation $[X]$ pour la dimension de X, ce qui n'est pas rigoureusement correct car $[X]$ doit normalement représenter l'unité de X. (Ces notations sont établies par le Bureau International des Poids et Mesures)

1. On a $\boxed{\dim(r) = L \text{ et } [r] = m}$; $\boxed{\dim(v) = LT^{-1} \text{ et } [v] = \mathrm{m\,s^{-1}}}$.
2. On peut utiliser le principe fondamental de la dynamique pour établir la dimension de F. On a
$$\boxed{\dim(F) = \dim(ma) = MLT^{-2}.} \tag{1}$$
L'unité de F est le newton ($\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$).
3. L'expression de la force de frottement permet d'écrire l'équation aux dimensions suivante
$$\boxed{MLT^{-2} = \dim(\eta) \times L \times LT^{-1} \quad \text{soit} \quad \dim(\eta) = ML^{-1}T^{-1}} \tag{2}$$
Au niveau des unités on a donc $\boxed{\mathrm{Pl} = \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}}$
4. On a l'équation aux dimensions suivante : $1 = \left(ML^{-3}\right)^{\alpha} \left(LT^{-1}\right)^{\beta} (L)^{\gamma} \left(ML^{-1}T^{-1}\right)^{\delta}$ ce qui amène le système d'équations suivant :
$$\begin{cases} 0 = \alpha + \delta \\ 0 = -3\alpha + \beta + \gamma - \delta \\ 0 = -\beta - \delta \end{cases} \tag{3}$$
5. En fixant $\alpha = 1$, on obtient $\beta = 1$, $\gamma = 1$ et $\delta = -1$. Le nombre de Reynolds s'exprime donc comme $\boxed{\mathrm{Re} = \frac{\rho v r}{\eta}}$.
6. On considère une balle de tennis de diamètre $d = 6{,}5\,\mathrm{cm}$ lancée à la vitesse $v = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et on trouve
$$\boxed{\mathrm{Re} \approx 4{,}7 \times 10^{4}} \tag{4}$$

Exercice 2 : Lentille de Fresnel

1 Anneau dioptrique

1. — Les relations (a) et (b) s'obtiennent directement en appliquant les lois de Snell-Descartes aux interfaces d'entrée et de sortie du rayon lumineux.
   — On écrit que la somme des angles du triangle AII' vaut π et on obtient $\frac{\pi}{2} - r + \frac{\pi}{2} - r' + A = \pi$ soit $\boxed{A = r + r'}$.
   — La déviation totale du rayon lumineux est la somme des déviations aux deux interfaces, on a donc
$$\boxed{D = i - r + i' - r' = i + i' - (r + r') = i + i' - A} \tag{1}$$
2. Pour que le rayon émergent soit parallèle à l'axe optique, on doit avoir $\boxed{D = i}$.

3. Avec les questions précédentes, on a $i = D$ et $i' = A$. On part de la relation (b) de la question 1 et on a

$$n\sin(r') = \sin(A) \Leftrightarrow n\sin(A-r) = \sin(A) \Leftrightarrow n\left(\sin(A)\cos(r) - \cos(A)\sin(r)\right) = \sin(A) \tag{2}$$

On utilise le fait que $\cos(r) = \sqrt{1-\sin^2(r)}$ et $n\sin(r) = \sin(i)$ pour obtenir

$$n\left(\sin(A)\sqrt{1-\frac{\sin^2(i)}{n^2}} - \cos(A)\frac{\sin(i)}{n}\right) = \sin(A) \tag{3}$$

On divise par $\cos(A)$

$$n\left(\tan(A)\sqrt{1-\frac{\sin^2(i)}{n^2}} - \frac{\sin(i)}{n}\right) = \tan(A) \Leftrightarrow \tan(A)\left(\sqrt{n^2-\sin^2(i)}-1\right) = \sin(i) \tag{4}$$

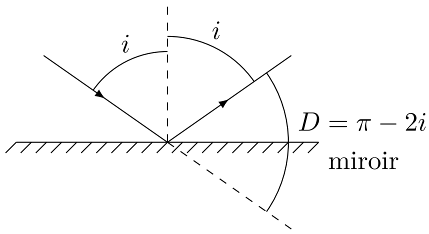
Et finalement on obtient bien

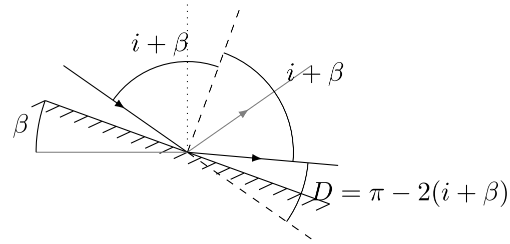
$$\boxed{\tan(A) = \frac{\sin(i)}{\sqrt{n^2-\sin^2(i)}-1}} \tag{5}$$

4. On a directement $\boxed{h = \frac{e}{\tan(A)}}$.
5. On fait l'application numérique avec l'expression trouvée à la question 3, et on trouve $\boxed{A_1 = 21°}$. Puis avec la réponse à la question 4, on a directement $\boxed{h_1 = 26\,\text{cm}}$
6. Pour répondre à cette question, on peut raisonner sur l'expression de $\tan(A)$ trouvée à la question 3. Pour $i \in [0; \pi/2]$ la fonction $\sin(i)$ est croissante donc le numérateur est une fonction croissante de i et le dénominateur est une fonction décroissante de i. Donc $\tan(A)$ augmente avec i et comme $\tan(x)$ est une fonction croissante (entre 0 et $\pi/2$) on en conclut que A augmente avec i.
   La réponse à la question 4 montre directement que h diminue lorsque A augmente et donc lorsque i augmente.
   Donc lorsque i augmente, $\boxed{A \text{ augmente et } h \text{ diminue}}$.

2 Anneau catadioptrique

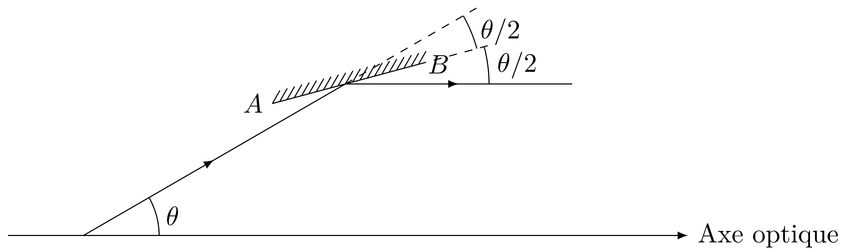
7. On est à la limite de réflexion totale en H lorsque $n\sin(\alpha_L) = 1$, soit $\boxed{\alpha_L = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)}$. Il y a réflexion totale lorsque l'angle d'incidence en est supérieur à α_L donc lorsque $\boxed{\alpha > \alpha_L}$. Numériquement, on trouve $\boxed{\alpha_L = 36°}$.
8. On prolonge la normale en H pour qu'elle intersecte la droite (AC) en un point H_1. La somme des angles dans le triangle IHH_1 vaut π, donc on a $\pi/2 - i_2 + \alpha + \widehat{C}/2 = \pi$ soit $i_2 = \alpha + \widehat{C}/2 - \pi/2$
   On prolonge la normale en H pour qu'elle intersecte la droite (BC) en un point H_2. La somme des angles dans le triangle $I'HH_2$ vaut π, donc on a $\pi/2 - i_3 + \alpha + \widehat{C}/2 = \pi$ soit $i_3 = \alpha + \widehat{C}/2 - \pi/2$.
   On a donc montré que $\boxed{i_2 = i_3}$.
   Les lois de Snell-Descartes appliquées aux deux interfaces donnent $\sin(i_1) = n\sin(i_2)$ et $\sin(i_4) = n\sin(i_3)$. Donc on a directement $\boxed{i_1 = i_4}$.
   Comme les rayons incident et émergent forment un même angle par rapport à la verticale ($i_1 + \pi/2 - \widehat{C}/2$), on en conclut que le prisme se comporte comme un miroir plan de normale verticale (donc parallèle à la base AB du prisme).
9. Lorsqu'un rayon se réfléchit sur un miroir plan avec un angle d'incidence i, il subit une déviation d'angle $D = \pi - 2i$.



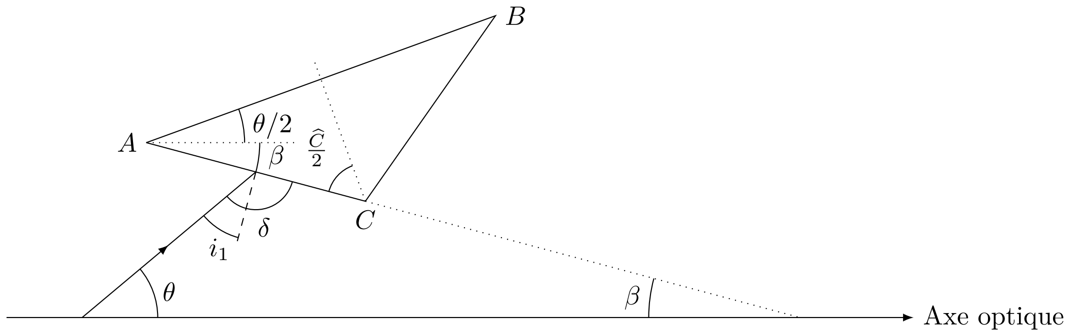


Si on tourne le miroir d'un angle β, l'angle d'incidence devient $\beta + i$ et la déviation est $D = \pi - 2\beta - 2i$. Le rayon a donc été dévié d'un angle $\boxed{2\beta}$ par rapport à la situation d'origine.

10. On veut que le rayon incident subisse une déviation d'un angle θ vers l'axe optique. Il faudra donc incliner la base AB du prisme d'une angle $\theta/2 = 20°$ par rapport à la situation où il forme un angle θ avec l'axe optique (rayon non dévié). La base AB devra donc former $\boxed{\text{un angle de } \theta - \theta/2 = \theta/2 = 20°}$ avec l'axe optique.



11. Dans ces conditions, l'angle formé par la face AC avec l'horizontale est $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{C}}{2} - \frac{\theta}{2}$ et l'angle δ entre le rayon incident et la face AC est $\delta = \pi - \theta - \beta = \pi/2 + \frac{\widehat{C}}{2} - \frac{\theta}{2}$. Or on a $\delta = \frac{\pi}{2} + i_1$ et donc l'angle d'incidence est $i_1 = \delta - \frac{\pi}{2} = \frac{\widehat{C}}{2} - \frac{\theta}{2} = 35°$.



On calcule ensuite $i_2 = \arcsin(\sin(i_1)/n)$, et $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{C}}{2} + i_2 = 54{,}7°}$

On a bien $\boxed{\alpha > \alpha_L \text{ et la condition de réflexion totale est vérifiée}}$.