DS1 : Optique, analyse dimensionnelle

- Durée : 2h.
- La calculatrice est autorisée.
- Chaque réponse doit être justifiée.
- Même lorsque ça n'est pas précisé, toute application numérique doit être précédée d'une expression littérale en fonction des données de l'énoncé.

Exercice 1 : Frottement visqueux

Dans un fluide, une bille de rayon r animée d'une vitesse de norme v est soumise à une force de frottement dont la norme s'exprime $F = 6\pi\eta r v$ où η est la viscosité du fluide exprimée en Poiseuille (Pl)

1. Rappeler les dimensions de r et v ainsi que les unités associées dans le système international d'unités (SIU).
2. Établir la dimension de F et rappeler l'unité SIU associée. Traduire cette unité en fonction des unités fondamentales.
3. Déterminer la dimension de η et en déduire le lien entre le poiseuille et les unités fondamentales du SIU.

Si ρ désigne la masse volumique du fluide dans lequel la bille évolue, on peut construire le nombre de Reynolds Re pour caractériser la nature de l'écoulement autour de la bille. Ce nombre de Reynolds est sans dimension et on va chercher son expression sous la forme $\mathrm{Re} = \rho^\alpha v^\beta r^\gamma \eta^\delta$

4. Établir proprement le système d'équations vérifié par le quadruplet $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.
5. Résoudre le système et établir l'expression du nombre de Reynolds sachant qu'on fixe le choix $\alpha = 1$.
6. Estimer le nombre de Reynolds qui caractérise l'écoulement de l'air autour d'une balle de tennis au cours d'un match. La viscosité de l'air étant $\eta = 1{,}8 \times 10^{-5}$ Pl et sa masse volumique $\rho = 1{,}3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. On estime généralement que l'écoulement est turbulent lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à 2000.

Exercice 2 : Lentille de Fresnel

Nous allons étudier l'optique des phares utilisés pour la signalisation des côtes. L'optique d'un phare est caractérisée par sa source lumineuse (à incandescence ou à arc) que nous supposerons ponctuelle, et de miroirs ou de lentilles qui fournissent des faisceaux approximativement cylindriques, visibles à grandes distances. Les premiers phares étaient équipés de miroirs, sphériques puis paraboliques. Augustin Fresnel propose en 1822 de les remplacer par des lentilles convergentes, la source lumineuse étant placée au foyer objet. Conscient de l'impossibilité technique de tailler des lentilles de grande taille, il a l'idée originale d'utiliser des «lentilles à échelon » composés de plusieurs éléments de verre.

Une lentille de Fresnel est constituée au centre, d'une lentille plan convexe C dont l'ouverture est limitée de façon à se placer dans les conditions de Gauss. Autour de C, on place une série d'anneaux dioptriques $A_1, A_2, \ldots$ de même axe optique.

Lorsque l'incidence sur la face plane augmente, il en est de même du pouvoir réflecteur de cette face : la perte de lumière qui en résulte deviendrait inacceptable pour de trop grands anneaux dioptriques. On les remplace par des anneaux circulaires catadioptriques $A'_1, A'_2, \ldots$, qui fonctionnent comme des prismes à réflexion totale annulaires et dont l'orientation est encore telle que chacun renvoie la lumière incidente parallèlement à l'axe optique.

Nous allons étudier les propriétés optiques des anneaux dioptriques et catadioptriques. Ils sont constitués de verre d'indice $n = 1{,}7$ et placés dans l'air d'indice 1,0. À chaque fois que n_{air} devait apparaître dans l'énoncé, il a été remplacé par la valeur 1.

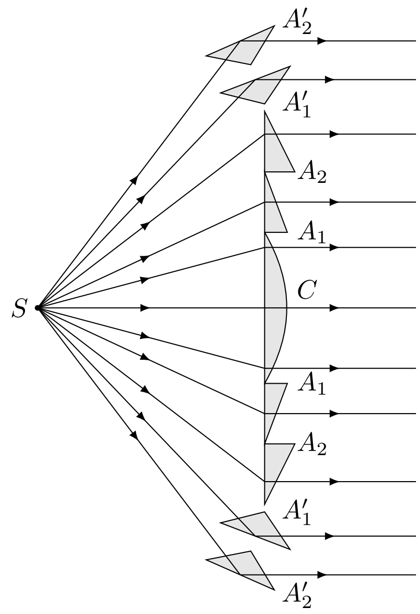

FIGURE 1 – Schéma de principe d'une lentille de Fresnel. Les déviations des rayons lumineux aux interfaces ne sont pas représentées fidèlement.

1 Anneau dioptrique

On modélise chaque anneau dioptrique par un prisme d'angle au sommet A. Soit un rayon lumineux arrivant sous un angle d'incidence i sur l'un des prismes de la lentille, on appelle D sa déviation.

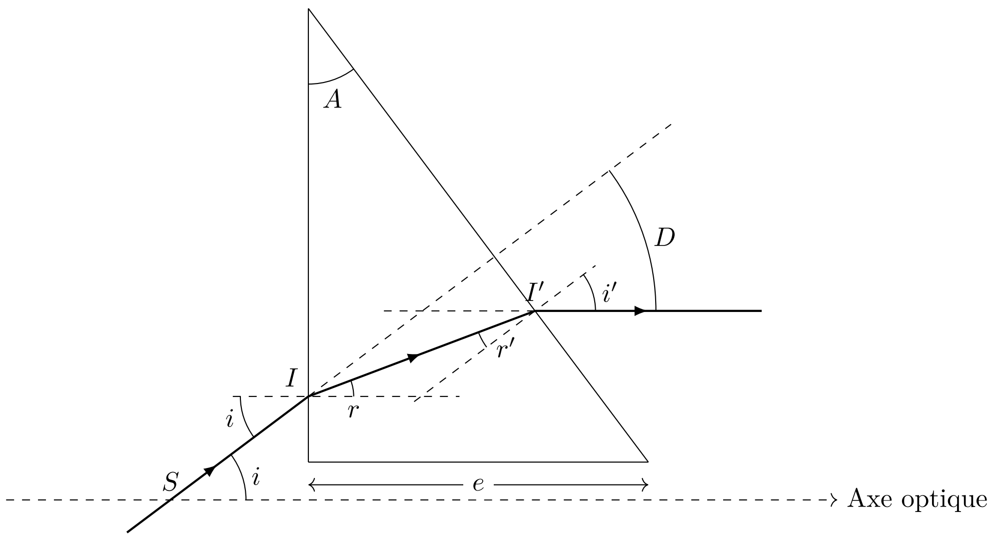

FIGURE 2 – Schéma d'un prisme composant un anneau dioptrique.

1. Établir les 4 relations suivantes :

   (a) $\sin(i) = n\sin(r)$

   (b) $\sin(i') = n\sin(r')$

   (c) $A = r + r'$

   (d) $D = i + i' - A$

2. On souhaite que le rayon émergent soit parallèle à l'axe optique de la lentille. Quelle relation doit exister entre D et i ?

3. En déduire que l'angle au sommet doit être relié à l'angle d'incidence par la relation :

$$\tan(A) = \frac{\sin(i)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(i)} - 1} \tag{1}$$

4. Toutes les bases des prismes ont même longueur e (largeur du centre de la lentille), on appelle h la hauteur du prisme. Exprimer h en fonction de e et A.
5. On suppose que l'angle d'incidence moyen sur le premier prisme vaut $i_1 = 15°$. Calculer l'angle au sommet A_1 correspondant et la hauteur h_1 du prisme si sa base est de largeur $e = 10\,\text{cm}$.
6. Comment varient A et h quand i augmente ? Justifier.

2 Anneau catadioptrique

Une lentille de Fresnel est constituée de 5 à 6 anneaux dioptriques et de 10 à 15 anneaux catadioptriques pour des angles supérieurs à 35°. Les anneaux catadioptriques sont modélisés par des prismes dont la base ABC est constituée d'un triangle isocèle d'angle au sommet $\widehat{C}$ égal à 110°.

Note : la normale en H ne passe pas par C.

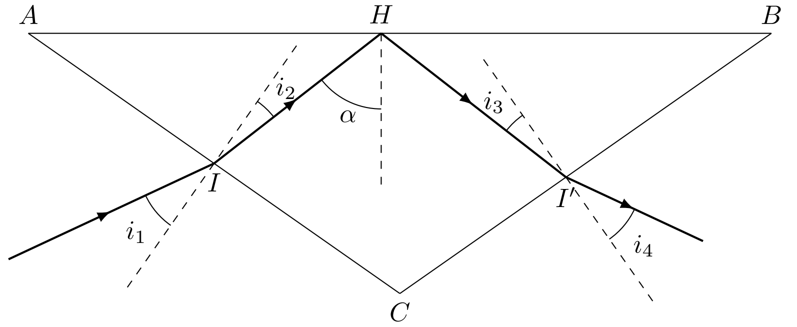

FIGURE 3 – Schéma d'un prisme catadioptrique.

7. Déterminer l'expression puis la valeur de l'angle limite de reflexion totale, noté α_L en H, point d'incidence du rayon sur AB. À quelle condition sur α y a-t-il réflexion totale en H ?
8. Quelle relation existe-t-il entre i_2 et i_3 ? Entre i_1 et i_4 ? Justifier. En déduire que le prisme se comporte comme un miroir plan parallèle à la base AB.
9. Soit un rayon se réfléchissant sur un miroir plan. Montrer que si on tourne le miroir d'un angle β, le rayon réfléchi tourne d'un angle 2β.
10. Pour un rayon incident incliné d'un angle $\theta = 40°$ par rapport à l'axe optique, en déduire de quel angle il faut incliner la base AB du prisme par rapport à l'axe optique afin que le rayon émerge parallèlement à l'axe optique.
11. Déterminer dans ce cas la valeur de α. La condition de réflexion totale est-elle vérifiée ?