

## CHIMIE, MÉCANIQUE ET UN PEU DE THERMO

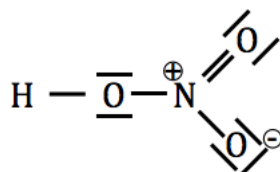
**I. Détermination de l'épaisseur de zinc déposé sur une rondelle**

<b>I.1</b> Hydrogène : $Z = 1$	$1s^1$ $\uparrow$	1 électron de valence
Azote : $Z = 7$	$1s^2 2s^2 2p^3$ $\uparrow\downarrow \uparrow \uparrow \uparrow$	5 électrons de valence
Oxygène : $Z = 8$	$1s^2 2s^2 2p^4$ $\uparrow\downarrow \uparrow\downarrow \uparrow \uparrow$	6 électrons de valence

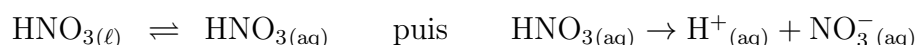
On a utilisé les règles de Pauli, Hünd et Klechkowsky.

**I.2** La molécule d'acide nitrique a pour formule brute  $\text{HNO}_3$ .

Le nombre d'électrons à répartir dans le schéma est  $N_e = 1 + 5 + 3 \times 6 = 24$ , soit 12 doublets d'électrons. Ainsi, le schéma de Lewis le plus probable est :

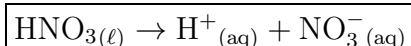


**I.3** Lors de la dissolution du corps pur  $\text{HNO}_{3(\ell)}$  dans l'eau, les molécules sont tout d'abord solvatées, puis l'acide nitrique est dissocié en ions, ces deux phénomènes se modélisant par les équations :

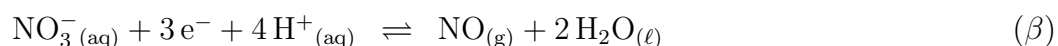


En effet, l'acide nitrique étant un acide fort dans l'eau, cette dernière réaction est totale.

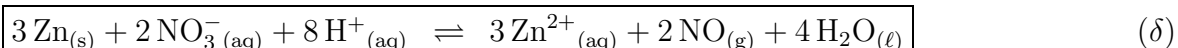
On a donc au final

La solution obtenue contient donc des ions  $\text{H}^+_{(\text{aq})}$  et  $\text{NO}_3^-_{(\text{aq})}$ .

**I.4** Demi-équations électroniques :  $\text{Zn}_{(\text{s})} \rightleftharpoons \text{Zn}^{2+}_{(\text{aq})} + 2e^-$  (α)



La combinaison linéaire  $3 \times (\alpha) + 2 \times (\beta)$  permet d'obtenir la réaction qui a lieu :



**I.5** La constante  $K^0$  de l'équilibre (δ) s'écrit :

$$K^0 = \frac{[\text{Zn}^{2+}]^3 (c^0)^7 (P_{\text{NO}})^2}{[\text{NO}_3^-]^2 [\text{H}^+]^8 (P^0)^2}$$

À l'équilibre chimique, il y a égalité des potentiels  $E_\alpha$  et  $E_\beta$ , ces deux derniers étant déterminés par la relation de Nernst :

$$E_\alpha = E_1^0 + \frac{0,059}{2} \log \left( \frac{[\text{Zn}^{2+}]}{c^0} \right)$$

$$E_\beta = E_2^0 + \frac{0,059}{3} \log \left( \frac{[\text{NO}_3^-] [\text{H}^+]^4 P^0}{(c^0)^5 P_{\text{NO}}} \right)$$

D'où 
$$E_1^0 + \frac{0,059}{2} \log \left( \frac{[\text{Zn}^{2+}]}{c^0} \right) = E_2^0 + \frac{0,059}{3} \log \left( \frac{[\text{NO}_3^-] [\text{H}^+]^4 P^0}{(c^0)^5 P_{\text{NO}}} \right)$$

$$K^0 = 10^{\frac{6 \times (E_2^0 - E_1^0)}{0,059}}$$

Application numérique :

$$K^0 = 8,2 \cdot 10^{174}$$

On remarque que  $K^0 \gg 1$  : cette réaction est extrêmement favorable thermodynamiquement. Comme le zinc est un corps condensé pur, sa disparition rigoureusement totale est possible, à condition qu'il soit réactif limitant. Il faut donc apporter l'acide nitrique en excès pour faire passer tout le zinc en solution, sous forme d'ions  $\text{Zn}^{2+}$ .

Une partie de l'acier dont est constitué la rondelle sous la couche de zinc sera également attaquée lors de cette opération, ce qui conduira à la présence d'ions  $\text{Fe}^{2+}$  et d'ions  $\text{Fe}^{3+}$ .

**I.6** Un pH-mètre est un voltmètre qui mesure la différence de potentiels entre deux électrodes plongées dans la solution :

- ★ l'électrode de verre, qui possède une fine membrane de verre qui se polarise en fonction du pH de la solution ;
- ★ une électrode de référence, qui possède un potentiel fixe, par exemple l'électrode de référence au calomel.

**I.7** ★ La condition de précipitation de  $\text{Zn}(\text{OH})_2$  selon  $\text{Zn}^{2+}_{(\text{aq})} + 2\text{HO}^-_{(\text{aq})} \rightleftharpoons \text{Zn}(\text{OH})_{2(\text{s})}$  s'écrit :

$$\frac{(c^0)^3}{[\text{Zn}^{2+}]_0 [\text{HO}^-]^2} \leq K_4^0 \quad \text{avec } [\text{Zn}^{2+}]_0 = C_{\text{tra}}$$

d'où

$$[\text{HO}^-] \geq [\text{HO}^-]_{\text{min1}} = \sqrt{\frac{c^0}{K_4^0 C_{\text{tra}}}} c^0$$

Application numérique :  $[\text{HO}^-]_{\text{min1}} = 7,9 \cdot 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1}$

★ La condition de précipitation de  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  selon  $\text{Fe}^{2+}_{(\text{aq})} + 2\text{HO}^-_{(\text{aq})} \rightleftharpoons \text{Fe}(\text{OH})_{2(\text{s})}$  s'écrit :

$$\frac{(c^0)^3}{[\text{Fe}^{2+}]_0 [\text{HO}^-]^2} \leq K_3^0 \quad \text{avec } [\text{Fe}^{2+}]_0 = C_{\text{tra}}$$

d'où

$$[\text{HO}^-] \geq [\text{HO}^-]_{\text{min2}} = \sqrt{\frac{c^0}{K_3^0 C_{\text{tra}}}} c^0$$

Application numérique :  $[\text{HO}^-]_{\text{min2}} = 8,8 \cdot 10^{-8} \text{ mol.L}^{-1}$

★ La condition de précipitation de  $\text{Fe}(\text{OH})_3$  selon  $\text{Fe}^{3+}_{(\text{aq})} + 3\text{HO}^{-}_{(\text{aq})} \rightleftharpoons \text{Fe}(\text{OH})_{3(\text{s})}$  s'écrit :

$$\frac{(c^0)^4}{[\text{Fe}^{3+}]_0 [\text{HO}^-]^3} \leq K_2^0 \quad \text{avec } [\text{Fe}^{3+}]_0 = C_{\text{tra}}$$

d'où 
$$[\text{HO}^-] \geq [\text{HO}^-]_{\text{min}3} = \left( \frac{c^0}{K_2^0 C_{\text{tra}}} \right)^{1/3} c^0$$

Application numérique : 
$$[\text{HO}^-]_{\text{min}3} = 4,6 \cdot 10^{-13} \text{ mol.L}^{-1}$$

**I.8** Le pH est défini par 
$$\text{pH} = -\log(a(\text{H}^+))$$

En solution diluée et en utilisant le produit ionique de l'eau, on a ainsi :

$$\text{pH} = 14 + \log\left(\frac{[\text{HO}^-]}{c^0}\right)$$

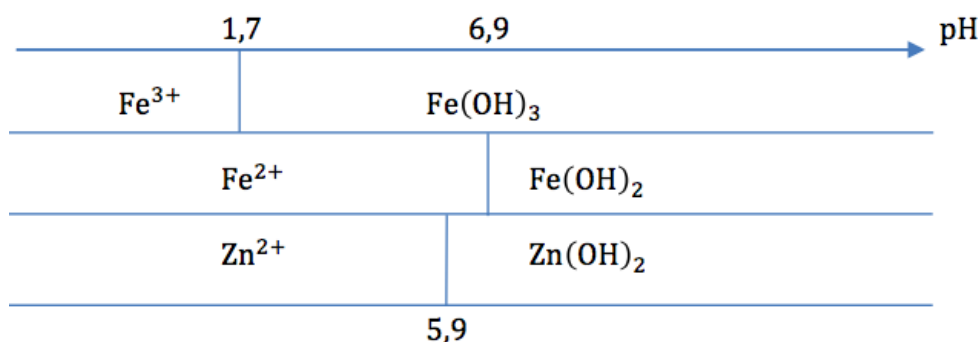
d'où 
$$\text{pH}_{\text{min}1} = 14 + \frac{1}{2} \log\left(\frac{c^0}{K_4^0 C_{\text{tra}}}\right) = 5,9$$

d'où 
$$\text{pH}_{\text{min}2} = 14 + \frac{1}{2} \log\left(\frac{c^0}{K_3^0 C_{\text{tra}}}\right) = 6,9$$

d'où 
$$\text{pH}_{\text{min}3} = 14 + \frac{1}{3} \log\left(\frac{c^0}{K_2^0 C_{\text{tra}}}\right) = 1,7$$

**I.9** Pour  $\text{Zn}^{2+}$ ,  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Fe}^{3+}$ , les domaines sont des domaines de prédominance. En ce qui concerne  $\text{Zn}(\text{OH})_2$ ,  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  et  $\text{Fe}(\text{OH})_3$ , il s'agit de domaines d'existence.

On obtient le diagramme suivant :



**I.10** Si on admet que les concentrations des différents cations dans la solution  $S_0$  ne sont pas trop éloignées, en ordre de grandeur, de la concentration  $C_{\text{tra}} = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$ , alors on peut utiliser le diagramme de la question précédente pour raisonner.

D'après la courbe pH-métrique fournie, le pH initial est d'environ 2,5, ce qui est dû à l'excès d'acide nitrique. Ce point est situé dans le domaine d'existence de  $\text{Fe}(\text{OH})_3$ , ce qui montre que ce précipité existe dès le début.

La soude versée de  $V = 0$  à  $V = V_{\text{éq}1}$  fait lentement augmenter le pH, ce qui est lié à la diminution progressive simultanée des concentrations de  $\text{H}^+$  et  $\text{Fe}^{3+}$  dans la solution :

Les deux réactions de constantes  $K_1^0$  et  $K_2^0$  ont lieu simultanément.

Avant le premier saut, le pH varie entre 2,5 et 4, ce qui est hors du domaine d'existence des précipités  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  et  $\text{Zn}(\text{OH})_2$  : pendant toute cette première phase, les ions  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Zn}^{2+}$  ne sont rigoureusement pas titrés.

Lorsque les ions  $\text{H}^+$  et  $\text{Fe}^{3+}$  sont quasiment épuisés, la soude n'est plus consommée et le pH augmente brusquement : c'est le premier saut de pH en  $V = V_{\text{éq}1}$ . On atteint alors, presque au même pH, les frontières d'existence de  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  et de  $\text{Zn}(\text{OH})_2$ , qui sont très proches.

La soude versée de  $V = V_{\text{éq}1}$  à  $V = V_{\text{éq}2}$  fait alors à nouveau lentement augmenter le pH, au voisinage de 8, ce qui montre bien que les précipités  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  et de  $\text{Zn}(\text{OH})_2$  sont présents tous les deux : cette phase correspond à la précipitation simultanée de  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Zn}^{2+}$  selon les réactions de constantes  $K_3^0$  et  $K_4^0$ .

Lorsque les ions  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Zn}^{2+}$  sont épuisés, à  $V = V_{\text{éq}2}$ , se produit le deuxième saut de pH, puis la soude s'accumule et le milieu devient nettement basique.

**I.11** A l'équivalence d'un dosage, on a :

$$\frac{n_{\text{titré}}^{\text{initial}}}{\alpha_{\text{titré}}} = \frac{n_{\text{titrant}}^{\text{versés pour ce dosage}}}{\alpha_{\text{titrant}}}$$

Comme le deuxième dosage implique les ions  $\text{Zn}^{2+}$  et  $\text{Fe}^{2+}$ , il vient :

$$\frac{n_{\text{Zn}^{2+}}^{\text{initial1}}}{1} + \frac{n_{\text{Fe}^{2+}}^{\text{initial1}}}{1} = \frac{n_{\text{HO}^-}^{\text{versés pour ce dosage}}}{2} = \frac{C(V_{\text{éq}2} - V_{\text{éq}1})}{2}$$

avec  $n_{\text{Zn}^{2+}}^{\text{initial1}}$  et  $n_{\text{Fe}^{2+}}^{\text{initial1}}$  les quantités de matière initiales en ions  $\text{Zn}^{2+}$  et  $\text{Fe}^{2+}$  dans le volume  $V_1$ .

Les concentrations en ions  $\text{Zn}^{2+}$  et en ions  $\text{Fe}^{2+}$  sont les mêmes dans le volume  $V_1$  et dans le volume  $V_0$ . Ainsi :

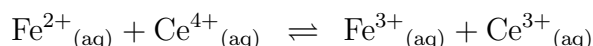
$$n_{\text{ZnFe}0} = \frac{(n_{\text{Zn}^{2+}}^{\text{initial1}} + n_{\text{Fe}^{2+}}^{\text{initial1}})}{V_1} V_0 = \frac{C(V_{\text{éq}2} - V_{\text{éq}1})}{2 V_1} V_0$$

*Application numérique :*

$$n_{\text{ZnFe}0} = 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$$

**I.12** En fin de titrage, la solution contient des précipités d'hydroxydes de fer et de zinc. Il faut donc verser le contenu du bécher dans le bidon de récupération des éléments métalliques, qui est un bidon sur lequel figure généralement l'indication « métaux ».

**I.13** Le titrage potentiométrique se fait selon la réaction



La stœchiométrie est donc de un pour un. Ainsi, à l'équivalence de ce dosage, on a :

$$n_{\text{Fe}^{2+}}^{\text{initial2}} = n_{\text{Ce}^{4+}}^{\text{versés pour ce dosage}} = C' V_{\text{éq}3}$$

avec  $n_{\text{Fe}^{2+}}^{\text{initial2}}$  la quantité de matière initiale en ions  $\text{Fe}^{2+}$  dans le volume  $V_2$ .

La concentration en ions  $\text{Fe}^{2+}$  est la même dans le volume  $V_2$  et dans le volume  $V_0$ . Ainsi :

$$n_{\text{Fe}0} = \frac{n_{\text{Fe}^{2+}}^{\text{initial2}}}{V_2} V_0 = \frac{C' V_{\text{éq}3}}{V_2} V_0$$

*Application numérique :*

$$n_{\text{Fe}0} = 4,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$$

**I.14** La quantité de matière  $n_{\text{Zn}0}$  en ions  $\text{Zn}^{2+}$  dans le volume  $V_0$  de solution  $S_0$  s'écrit :

$$n_{\text{Zn}0} = n_{\text{ZnFe}0} - n_{\text{Fe}0}$$

d'où

$$n_{\text{Zn}0} = \left[ \frac{C(V_{\text{éq}2} - V_{\text{éq}1})}{2V_1} - \frac{C'V_{\text{éq}3}}{V_2} \right] V_0$$

Application numérique :

$$n_{\text{Zn}0} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$$

**I.15** La réaction ( $\delta$ ) montre que lorsqu'une mole de  $\text{Zn}_{(s)}$  disparaît, une mole d'ions  $\text{Zn}^{2+}_{(aq)}$  apparaît en solution. Comme cette réaction peut être considérée comme totale, on en déduit la quantité de matière  $n_{\text{Zn lame}}$  de zinc présent sur la lame :

$$n_{\text{Zn lame}} = n_{\text{Zn}0}$$

Le volume  $V_{\text{Zn lame}}$  de zinc correspondant s'écrit

$$V_{\text{Zn}} = \frac{n_{\text{Zn lame}} M_{\text{Zn}}}{\rho_{\text{Zn}}}$$

Ce volume est généré par la surface  $S$  et l'épaisseur  $e$ , telles que  $V_{\text{Zn}} = e \times S$ . On en déduit :

$$e = \frac{n_{\text{Zn lame}} M_{\text{Zn}}}{\rho_{\text{Zn}} S}$$

d'où

$$e = \left[ \frac{C(V_{\text{éq}2} - V_{\text{éq}1})}{2V_1} - \frac{C'V_{\text{éq}3}}{V_2} \right] V_0 \times \frac{M_{\text{Zn}}}{\rho_{\text{Zn}} S}$$

Application numérique :

$$e = 1,4 \mu\text{m}$$

## II. Loi de Murphy et tartine à la confiture

- \* Référentiel : référentiel terrestre, galiléen ;
- \* Système : tige, de masse  $m$  et de centre de gravité  $G$  ;
- \* Hypothèses : pas de frottements ;
- \* Bilan des forces s'exerçant sur  $m$  :
  - le poids :  $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_x$  ;
  - la liaison pivot parfaite en  $O$ , de résultante  $\vec{R}$  et telle que  $M_{Oz}(\text{pivot})$

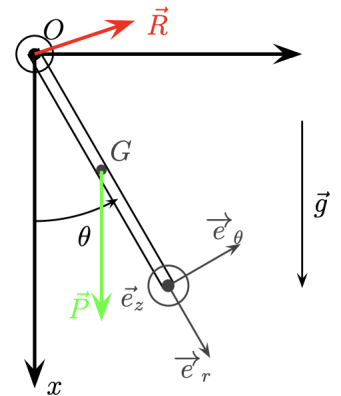
**II.1** L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe s'écrit

$$E_c = \frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\theta}^2$$

**II.2** L'axe  $x$  est orienté vers le bas, on a donc

$$E_p = -mgx_G + C^{\text{te}} = -mg\frac{\ell}{2} \cos(\theta) + C^{\text{te}}$$

**II.3** La tige est soumise aussi à la liaison pivot, qui est de puissance nulle.



**II.4** Les positions d'équilibre correspondent aux points  $\theta_e$  où  $\frac{dE_p}{d\theta}(\theta_e) = 0$  :

Or 
$$\frac{dE_p}{d\theta}(\theta_e) = mg\frac{\ell}{2}\sin(\theta)$$

d'où

$$\theta_{e1} = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_{e2} = \pi$$

Les positions d'équilibre stables correspondent aux minimums (locaux) de la fonction  $E_p(\theta)$  :

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta) = mg\frac{\ell}{2}\cos(\theta)$$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta_{e1}) = mg\frac{\ell}{2} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta_{e2}) = -mg\frac{\ell}{2} < 0$$

$\theta_{e1}$  est un position d'équilibre stable et  $\theta_{e2}$  est un position d'équilibre instable.

**II.5** D'après le théorème de la puissance mécanique, appliqué au système {la tige} dans le référentiel terrestre, galiléen :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc,int} + \mathcal{P}_{nc,ext}$$

Puisque le système est un solide, alors  $\mathcal{P}_{int} = 0$  et on a déjà vu que  $\mathcal{P}_{nc,ext} = 0$ . On en déduit que  $E_m(t)$  est constante :

$$E_m(t) = \frac{1}{2}J_{O_z}\dot{\theta}^2 - mg\frac{\ell}{2}\cos(\theta) = C^{te}$$

Pour obtenir l'équation du mouvement, on dérive l'intégrale première du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left( -mg\frac{\ell}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{2}J_{O_z}\dot{\theta}^2 \right) = 0$$

donc 
$$mg\frac{\ell}{2}\sin\theta + J_{O_z}\ddot{\theta} = 0$$

Avec l'expression de  $J_{O_z}$  :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2\ell}\sin\theta = 0$$

**II.6** Aux petits angles,  $\sin(\theta) \simeq \theta$ . On reconnaît l'équation différentielle d'un OH de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$ . Les solutions sont

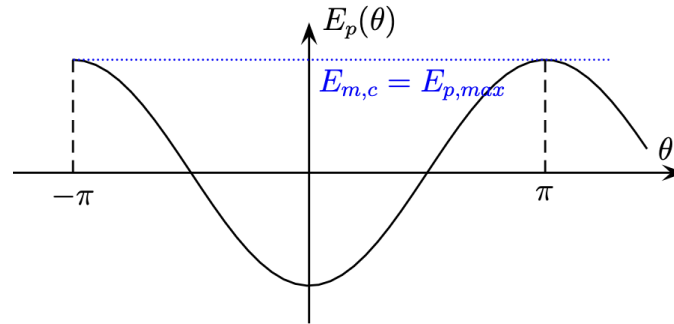
$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Compte tenu des conditions initiales  $\theta(0) = 0$  et  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ , on en déduit

$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Pour rester dans les petits angles, il faut que l'amplitude des oscillations reste faible (devant 1 rad),

soit  $\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \ll 1$ . La vitesse angulaire initiale doit être faible devant la pulsation propre du système.



**II.7** Si on étudie la courbe  $E_p(\theta) = -mg\frac{\ell}{2}\cos(\theta)$  :

On trouve les domaines accessibles en écrivant  $E_m = E_c + E_p$ . Comme l'énergie cinétique est toujours positive, ces derniers sont définis par  $E_p \leq E_m$ .

On peut voir que l'on reste dans un état lié ( $\theta$  est borné) tant que  $E_m \leq E_{p,max}$ , soit dans notre cas :

$$\frac{1}{2}J_{Oz}\dot{\theta}_0^2 - mg\frac{\ell}{2} \leq mg\frac{\ell}{2}$$

La limite est donc atteinte pour

$$\dot{\theta}_c = \sqrt{\frac{2mg\ell}{J_{Oz}}} = \sqrt{\frac{6g}{\ell}}$$

Si  $\dot{\theta}_0 > \dot{\theta}_c$ , on aura un mouvement révolatif (la tige tourne toujours dans le même sens sans s'arrêter), sinon, on aura un mouvement oscillant autour de la position stable.

**II.8** Le point d'application de  $\vec{R}$  est immobile. Comme dans la formule pour la puissance  $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ , c'est la vitesse du point d'application qui compte, on en déduit que la puissance de la force de réaction  $\vec{R}$  est nulle.

On peut comme dans la partie précédente appliquer le théorème de la puissance mécanique pour en déduire que l'énergie mécanique se conserve.

Or 
$$E_m = \frac{1}{2}J_y\dot{\theta}^2 + mge\cos(\theta) = C^{te} = E_m(t=0) = mge$$

d'où

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2mge(1 - \cos(\theta))}{J_y} = \frac{6ge(1 - \cos(\theta))}{a^2 + 4e^2}$$

**II.9** En dérivant l'expression précédente par rapport au temps et en simplifiant par  $2\dot{\theta} \neq 0$  :

$$\ddot{\theta} = \frac{3ge(\sin(\theta))}{a^2 + 4e^2}$$

**II.10** On peut appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à  $Oy$  qui est bien un axe fixe. Le moment du poids est  $+mge\sin(\theta)$  (bras de levier), le moment de  $\vec{R}$  est nul, d'où

$$J_y\ddot{\theta} = mge\sin(\theta)$$

Ceci donne bien la même relation en remplaçant  $J_y$  par son expression.

**II.11** En prenant toujours comme système la tartine, soumise uniquement à son poids et à  $\vec{R}$ , on applique le principe fondamental de la dynamique au mouvement de rotation :

$$m\vec{a}(G) = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$m \left( -r\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r\ddot{\theta} \vec{e}_\theta \right) = m \vec{g} + \vec{R} = -mg \cos(\theta) \vec{e}_r + mg \sin(\theta) \vec{e}_\theta + R_N \vec{e}_r + R_T \vec{e}_\theta$$

On projette selon les deux vecteurs de bases et on obtient le système suivant :

$$-mr\dot{\theta}^2 = -mg \cos(\theta) + R_N \quad \text{et} \quad mr\ddot{\theta} = mg \sin(\theta) + R_T$$

Ici  $r = OG = e$ , et on peut utiliser les expressions précédentes pour remplacer  $\dot{\theta}^2$  et  $\ddot{\theta}$ .

$$-me \underbrace{\left( \frac{6ge(1 - \cos(\theta))}{a^2 + 4e^2} \right)}_{\dot{\theta}^2} = -mg \cos(\theta) + R_N \quad \text{et} \quad me \underbrace{\frac{3ge(\sin(\theta))}{a^2 + 4e^2}}_{\ddot{\theta}} = mg \sin(\theta) + R_T$$

En isolant  $R_T$  et  $R_N$ , on obtient les expressions proposées par l'énoncé :

$$\boxed{R_T = mg \left( \frac{3e^2}{a^2 + 4e^2} - 1 \right) \sin(\theta) \quad \text{et} \quad R_N = mg \left( \cos(\theta) - \frac{6e^2(1 - \cos(\theta))}{a^2 + 4e^2} \right)}$$

Puisque l'énoncé nous donne des valeurs avec  $e^2 \ll a^2$ , on peut fortement simplifier ces expressions en première approximation :

$$\boxed{R_T = -mg \sin \theta \quad \text{et} \quad R_N = mg \cos \theta}$$

**II.12** D'après la loi de Coulomb, puisque la tartine ne glisse pas tant que  $|R_T| \leq \mu |R_N|$ , alors elle glisse à partir de  $|R_T| = \mu |R_N|$ . En remplaçant par les valeurs trouvées à la question précédente, cela donne  $\tan(\theta_0) = \mu$ , et puisque l'énoncé propose de prendre  $\mu = 1$ , on obtient

$$\boxed{\theta_0 = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}}$$

On peut en déduire  $\dot{\theta}(t=0)$  simplement en utilisant la réponse aux questions précédentes : on a montré au début du problème que  $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{6ge(1 - \cos(\theta))}{a^2 + 4e^2}}$ .

d'où

$$\boxed{\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{6ge(1 - \cos(\theta_0))}{a^2 + 4e^2}} = \sqrt{\frac{6ge(1 - 1/\sqrt{2})}{a^2 + 4e^2}}}$$



**II.13** Puisque la tartine est en chute libre, elle n'est soumise qu'à son poids. La 2<sup>ème</sup> loi de Newton donne donc

$$\ddot{z}_G(t) = -g \iff z_G(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

En effet, la vitesse initiale est nulle et l'altitude initiale quasi-nulle. On pourrait ajouter  $e/\sqrt{2}$ , mais cela ne change presque rien par rapport à la hauteur de chute  $h$ .

La tartine atteint le sol lorsque  $z_G(\tau) \simeq -h$

Ceci est aussi une approximation vu que cela dépend de comment est tournée la tartine, mais encore une fois, cela change peu le résultat

$$\tau \simeq \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

**II.14** Puisque pendant la phase de vol, la vitesse angulaire de la tartine reste constamment égale à  $\dot{\theta}_0$  par hypothèse, alors la loi horaire est simplement

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 \times t$$

**II.15** À l'aide des deux questions précédentes, lorsque la tartine va atteindre le sol, elle aura tourné de

$$\theta(\tau) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 \times \tau = \theta_0 + \sqrt{\frac{6ge(1 - 1/\sqrt{2})}{a^2 + 4e^2}} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

d'où

$$\theta(\tau) = \theta_0 + \sqrt{\frac{12he(1 - 1/\sqrt{2})}{a^2 + 4e^2}}$$

**II.16** Pour conclure quant au côté sur lequel va tomber la tartine, il faut faire l'application numérique :

- ★ entre  $-90^\circ$  et  $90^\circ$ , la tartine tombera du côté sans confiture ;
- ★ alors que ce sera l'inverse entre  $90^\circ$  et  $270^\circ$ .

Numériquement, on trouve que  $\theta(\tau) = 1,7 \times 10^2^\circ$  : la tartine tombe donc du mauvais côté comme le suggérait l'énoncé.

**II.17** On peut voir que le résultat ne dépend pas de  $g$ , donc même si la gravité change sur Mars, des créatures de tailles humaines sur Mars aurait donc la même loi de Murphy.

### III. Stockage du diazote

**III.1** On prend comme température ambiante  $T = 298 \text{ K}$ . En appliquant l'équation d'état aux  $n$  moles de diazote, considéré comme un gaz parfait, occupant le volume  $V = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$  à la pression atmosphérique de  $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  et à la température  $T$ , on obtient :

$$N = n \mathcal{N}_A = \frac{P_0 V}{R T} \mathcal{N}_A$$

Application numérique :

$$N = 2,4 \cdot 10^{22} \text{ molécules}$$

**III.2** On doit raisonner sur l'isotherme d'Andrews à  $\theta_1 = -200 \text{ }^\circ\text{C}$ , le système étant représenté par le point  $M_1$  du palier de liquéfaction de cette isotherme. Ce point  $M_1$  a pour abscisse dans le diagramme de Clapeyron le volume massique  $v_1$  :

$$v_1 = \frac{V_1}{m_1}$$

Application numérique :  $v_1 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$

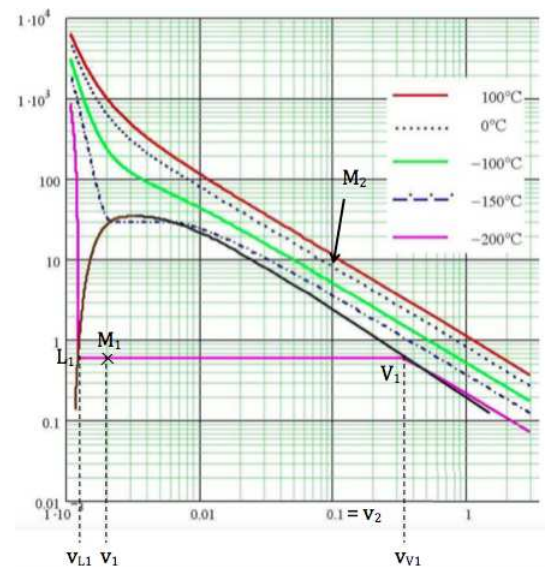
Sur ce palier, on lit les volumes massiques  $v_{V1}$  et  $v_{L1}$  respectivement des points  $V_1$  (appartenant à l'isotherme  $-200 \text{ }^\circ\text{C}$  et sur la courbe de rosée) et  $L_1$  (appartenant à l'isotherme  $-200 \text{ }^\circ\text{C}$  et sur la courbe d'ébullition) :

$$v_{V1} = 0,33 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \quad \text{et} \quad v_{L1} = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

Le théorème des moments s'écrit  $x_{V1} = \frac{v_1 - v_{L1}}{v_{V1} - v_{L1}}$

Application numérique :

$$x_{V1} = 0,21 \%$$



**III.3** L'isotherme à considérer est située entre l'isotherme à  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  et l'isotherme à  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Le diazote est à l'état de fluide homogène ou supercritique (au dessus de l'isotherme critique).

Le point  $M_2$ , appartenant à l'isotherme à  $25 \text{ }^\circ\text{C}$  et représentant l'état du système, a pour abscisse dans le diagramme de Clapeyron le volume massique  $v_2$  :

$$v_2 = \frac{V_2}{m_2}$$

Application numérique :  $v_2 = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$

La pression correspondante est directement lue sur le diagramme de Clapeyron (cf. point  $M_2$  reporté sur le diagramme ci-avant).

Il faut pressuriser le diazote sous environ  $P_2 = 9 \text{ bar}$  afin de le confiner dans  $1 \text{ m}^3$ .

