Chimie, ondes et mécanique du point

Jeudi 1er février 2024 - Durée 4h

- ⋆ **La calculatrice est autorisée.**
- ⋆ **Il sera tenu le plus grand compte du soin, de la présentation, et de la rédaction.**
- ⋆ **Chaque réponse doit être justifiée. Toute application numérique doit être précédée d'une expression littérale en fonction des données de l'énoncé.**

I. Pile au lithium de Philae

L'année 2014 a été marquée par la mission Rosetta au cours de laquelle la sonde du même nom est entrée en orbite autour de la comète 67P/Churyumov-Gerasimenko, surnommée Tchouri, après un voyage de 10 ans. Une fois sur orbite, la sonde Rosetta a largué l'atterrisseur Philae qui s'est posé sur la surface de la comète afin de l'étudier.

L'énergie électrique nécessaire à Philae est fournie par une pile au lithium comprenant $N = 32$ cellules, branchées en parallèle, utilisant le couple lithium-chlorure de thionyle ($Li - SOCl_2$). L'ensemble doit fournir $E = 835$ W.h au moment du déploiement de Philae, c'est-à-dire la séquence d'une durée $\tau \approx 1/2$ h suivant la séparation du module de Rosetta et précédent sa descente vers la comète, au cours de laquelle l'atterrisseur a déployé son train d'atterrissage et son antenne.

La pile au lithium fonctionne grâce à une réaction entre le lithium solide et le chlorure de thionyle liquide, ce qui donne du soufre et du dioxyde de soufre, tous deux dissous dans $SOCl_2$ (on notera en indice « solv » pour « solvaté »), ainsi que du chlorure de lithium LiCl solide.

1. Écrire l'équation de la réaction de fonctionnement de la pile.
2. La constante d'équilibre de cette réaction est de l'ordre de $K^0 \approx 10^{233}$ à 25 °C.
   a) Écrire le quotient de la réaction en fonction des activités des différents constituants, puis en fonction des concentrations des constituants.
   On rappelle que le solvant est le chlorure de thionyle.
   b) Initialement, seuls les réactifs sont présents. Que vaut le quotient de réaction à $t = 0$?
   c) Que vaut le quotient de réaction une fois l'équilibre atteint ?
   d) Que peut-on alors conclure de la valeur de K^0 à 25 °C ?
   e) Est-il possible que la pile s'arrête de fonctionner alors que l'équilibre n'est pas atteint ?
3. La « capacité » (charge totale pouvant circuler) d'une cellule vaut $Q_{cell} = 1,0$ A.h, et le réactif limitant est le lithium. Sachant que pour une mole de lithium il circule dans le circuit d'utilisation 4 moles d'électrons, déterminer la masse de lithium initialement présente dans une cellule, ainsi que la masse minimale de chlorure de thionyle dans une cellule.
4. À partir des données de l'énoncé, et en considérant que la pile est usée à la fin de son utilisation, déterminer l'intensité moyenne I_{moy} ayant circulé dans le circuit d'utilisation de la pile, ainsi que la puissance moyenne P_{moy} consommée par ce circuit.

Données :
- ⋆ Masses molaires :
  $M(Li) = 6,94$ g.mol^{-1} ; $M(O) = 16,0$ g.mol^{-1} ; $M(S) = 32,1$ g.mol^{-1} ; $M(Cl) = 35,5$ g.mol^{-1}.
- ⋆ Charge élémentaire : $e = 1,6.10^{-19}$ C
- ⋆ Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02.10^{23}$ mol^{-1}
- ⋆ Température de fusion de $SOCl_2$ à pression atmosphérique : $\theta_{fus} = -104,5$ °C

II. Célérité et enregistrement d'un son

1. Une onde sonore est une onde mécanique longitudinale. Justifier cette affirmation.
2. La célérité du son dans l'air vérifie une loi du type $v = k\,\mathrm{P}^{\alpha}\,\rho^{\beta}$ où P est la pression du gaz au repos et ρ sa masse volumique.
   a) Déterminer α et β.
   b) On assimile l'air à un gaz parfait de masse molaire $\mathrm{M_{air}}$ à la température T.
      i. Déterminer la célérité v en fonction de k, R, T et $\mathrm{M_{air}}$.
      ii. On suppose l'air constitué (en fraction molaire ou en volume) de $x\,(\mathrm{O_2}) = 20$ % de $\mathrm{O_{2(g)}}$ et de $x\,(\mathrm{N_2}) = 80$ % de $\mathrm{N_{2(g)}}$. Déterminer $\mathrm{M_{air}}$ en fonction de ces proportions ainsi que des masses molaires $\mathrm{M}\,(\mathrm{O_2})$ et $\mathrm{M}\,(\mathrm{N_2})$. Application numérique.

On donne pour l'air $k = \sqrt{\gamma_{\mathrm{air}}}$ (où γ_{air} est un coefficient lié à l'atomicité du gaz).

3. Calculer la célérité du son v_{th} dans l'air à 20 °C avec trois chiffres significatifs.
4. Une expérience (à 20 °C) de détermination de la célérité du son consiste à produire un claquement en S et à enregistrer les tensions délivrées par deux microphones $\mathrm{M_A}$ et $\mathrm{M_B}$ (S, $\mathrm{M_A}$, $\mathrm{M_B}$ alignés et $\mathrm{M_A}$, $\mathrm{M_B}$ distants de $d_1 = (1,50 \pm 0,02)$ m) sur un oscilloscope. On constate un décalage temporel $\tau = (4,38 \pm 0,02)$ ms.
   Déterminer littéralement puis calculer (avec trois chiffres significatifs) la célérité v_{exp} accompagnée de son incertitude $u(v_{\mathrm{exp}})$ du son dans l'air. Comparer v_{th} et v_{exp}.

Pour la suite, on gardera la valeur v_{exp} que l'on notera v. On pourra par ailleurs garder v dans les expressions littérales.

5. Un haut-parleur émet en S dans l'air environnant à 20 °C une onde sonore sinusoïdale de période temporelle T, de période spatiale λ et d'amplitude A. S est l'origine de l'axe des x, ce dernier passant par le point M. On place un microphone en M, d'abscisse x_{M} telle que $x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{S}} = x_{\mathrm{M}} = 2,0$ m.
   a) Écrire le signal $y\,(\mathrm{S}, t)$ décrivant l'onde en S. On prendra la phase nulle à l'origine des temps et de l'espace. Quelle est l'expression de la phase $\varphi\,(\mathrm{S}, t)$ du signal en S ?
   b) Écrire alors $y\,(\mathrm{M}, t)$. Quelle est l'expression de la phase $\varphi\,(\mathrm{M}, t)$ du signal en M ?
   c) Quelle est l'expression, en fonction de x_{M} et de λ, du déphasage $\Delta\varphi = \varphi\,(\mathrm{M}, t) - \varphi\,(\mathrm{S}, t)$?
   d) Pour quelles fréquences f_{pha} les vibrations du haut-parleur et du microphone sont-elles en phase ? Quelles sont les trois plus petites valeurs de f_{pha} ?
   e) Pour quelles fréquences f_{opp} les vibrations du haut-parleur et du microphone sont-elles en opposition de phase ? Quelles sont les trois plus petites valeurs de f_{opp} ?
6. La fréquence est fixée à $f = 500$ Hz.
   a) Calculer $\Delta\varphi$ à cette fréquence.
   b) Tracer les courbes correspondant à ce que l'on voit à l'oscilloscope (voie $\mathrm{Y_1}$: tension haut-parleur ; voie $\mathrm{Y_2}$: tension microphone).
   c) Comment peut-on mesurer le déphasage $\Delta\varphi$ entre les deux signaux visualisés ?
   d) De quelle distance d' doit-on déplacer au minimum le microphone pour pouvoir superposer les deux courbes ?

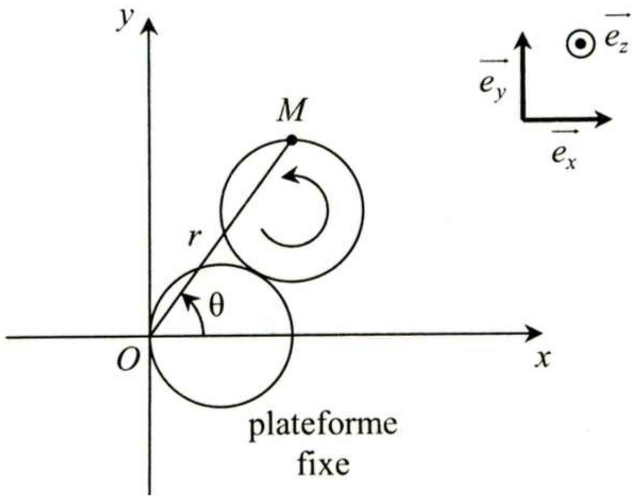
Données :
- ⋆ $\mathrm{M}\,(\mathrm{N}) = 14$ g.mol^{-1} et $\mathrm{M}\,(\mathrm{O}) = 16$ g.mol^{-1}
- ⋆ À 20 °C, $\gamma_{\mathrm{air}} = 1,40$
- ⋆ Constante d'état des gaz parfaits : $\mathrm{R} = 8,314$ J.K^{-1}.mol^{-1}
- ⋆ Supposons que l'on calcule $y(x_1, x_2) = a\,x_1^{\alpha}\,x_2^{\beta}$. L'incertitude-type $u(y)$ de y est telle que

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\alpha\,\frac{u\,(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\beta\,\frac{u\,(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

III. Manège

Dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}$, on définit un repère Oxyz avec un axe (Oz) vertical ascendant. La figure ci-contre est une vue de dessus.

Un manège est constitué de deux plateformes circulaires horizontales de même rayon R : l'une est immobile par rapport au référentiel terrestre, sa circonférence passe par l'origine O du repère et son centre est sur l'axe (Ox) ; l'autre peut rouler sans glisser autour de la première.



Un enfant, assimilé à un point M, a pris place sur le manège, en un point de la circonférence de la plateforme mobile. M décrit alors une trajectoire contenue dans le plan horizontal (Oxy) et décrite par l'équation polaire :

$$r(\theta) = 2\mathrm{R}(1 + \cos\theta)$$

On suppose de plus que la vitesse angulaire ω est maintenue constante, soit $\theta = \omega t$ à partir de l'instant initial $t = 0$.

1. **Trajectoire**
   Reproduire sur un schéma les axes du plan et le cercle représentant la plateforme fixe. Placer sur ce schéma les quatre points de la trajectoire de M correspondant aux angles $\theta = 0$ (ce point sera noté A), $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (point B), $\theta = \pi$ (point C), $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ (point D), puis dessiner l'allure de la trajectoire complète (cette courbe s'appelle une cardioïde).
   Ajouter la base cylindrique (vecteurs $\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}$) au point D.

2. **Vitesse**
   a) Déterminer, en fonction du temps t et des deux constantes R et ω, les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$(M) dans $\mathscr{R}$ dans la base cylindrique.
   Dessiner ce vecteur au point D.
   b) Montrer que la norme de la vitesse s'écrit $||\overrightarrow{v}|| = 4\mathrm{R}\omega \left|\cos\left(\dfrac{\omega t}{2}\right)\right|$.
   c) En quel point l'enfant risque-t-il de se faire le plus mal s'il est ejecté (vitesse maximale), et dans quelle direction serait-il alors éjecté ?
   d) En quel point l'enfant pourra-t-il essayer de descendre du manège (vitesse nulle) ?

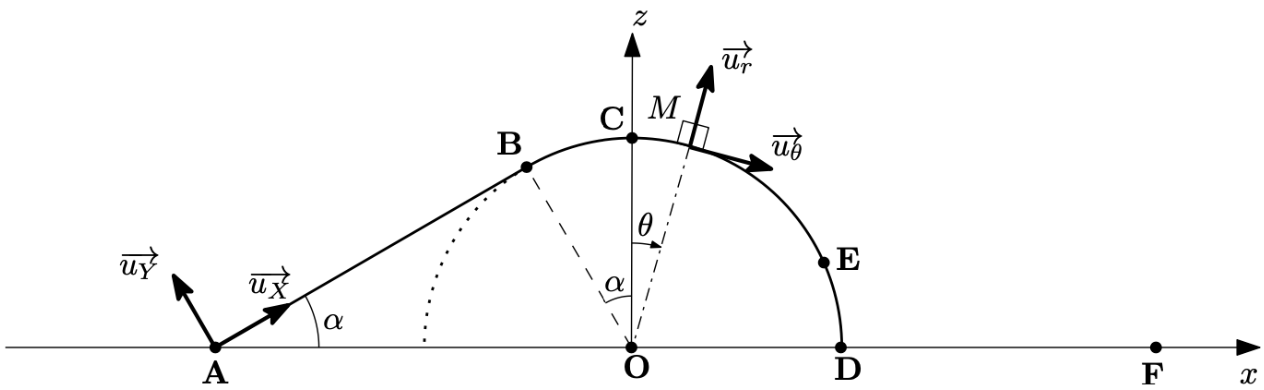
3. **Accélération**
   a) Déterminer, en fonction du temps t et des deux constantes R et ω, les composantes du vecteur accélération $\overrightarrow{\gamma}$(M) dans $\mathscr{R}$ dans la base cylindrique.
   b) Déterminer ces composantes au point D puis dessiner le vecteur accélération en ce point.
   c) Déterminer la norme de l'accélération en fonction de t, R et ω.
   d) Il n'existe pas de sensation absolue de vitesse, en revanche ce qu'on ressent fortement est l'accélération que l'on subit.
   En quel point l'enfant risque-t-il le plus de se sentir mal ?

IV. Parcours mouvementé

On considère un palet qu'on assimilera à un point matériel (M, m) avec $m = 100$ g. Ce palet est lancé sur une piste représentée figure ci-après composée d'une portion rectiligne AB, inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale, et d'une portion circulaire BCD, de rayon $r = 2,0$ m et d'angle $\widehat{\mathrm{DOB}} = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$.

Le sens de rotation positive est le sens horaire et $\theta = 0$ quand M est en C.

Le palet est lancé depuis le point A à $t = 0$ avec la vitesse $\overrightarrow{v_\mathrm{A}} = v_\mathrm{A}\,\overrightarrow{u_\mathrm{X}}$ telle que $v_\mathrm{A} = 6,5$ m.s^{-1}, et il glisse sans frottement sur la piste. On désigne par $g = 10$ m.s^{-2} l'intensité du champ de pesanteur, et on négligera les éventuels effets de l'air sur le mouvement du palet.



1. On s'intéresse dans un premier temps au parcours de la rampe AB. Pour cela, on utilise le repère $(\mathrm{A}, \overrightarrow{u_\mathrm{X}}, \overrightarrow{u_\mathrm{Y}})$ représenté sur la figure ci-avant.

   a) Établir l'expression de l'accélération $\overrightarrow{\gamma}$ en fonction des forces qui s'exercent sur le système.

   b) Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ dans le repère choisi en fonction de $\mathrm{X}(t)$, et en déduire les vecteurs vitesse $\overrightarrow{v}$ et accélération $\overrightarrow{\gamma}$.

   c) Déduire successivement des questions précédentes la vitesse $v(t)$ et la position $\mathrm{X}(t)$ du palet le long de la rampe.

   d) Exprimer en fonction de v_A, g, r et α la durée τ au bout de laquelle le point **B** est atteint, puis calculer cette durée. On montrera que le point B n'est atteint que si $v_\mathrm{A} \geqslant v_{\mathrm{A},\ell_1}$, et on exprimera la vitesse initiale minimale v_{A,ℓ_1} en fonction de g, r et α.

      Effectuer l'application numérique, et indiquer si la condition est vérifiée.

      Remarque : *On obtient deux valeurs de τ : l'une correspond au passage par* **B** *lors de la montée, l'autre lors de la descente si la piste se prolongeait plus haut et que le palet s'arrête et redescende.*

   e) Conclure en déterminant la vitesse v_B atteinte en B en fonction de v_A, g, r et α.

      Effectuer l'application numérique.

   f) Déterminer l'expression de la norme N de l'action normale de la piste sur le palet.

      Effectuer l'application numérique.

2. On étudie à présent le parcours de la portion courbe BCD. On se placera en coordonnées polaires planes $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ représentées sur la figure ci-avant. On effectue un changement d'origine des temps en posant $t' = t - \tau$, et afin d'alléger l'écriture, on notera t au lieu de t'.

   a) En écrivant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation qui lie $\ddot{\theta}$ et θ.

   b) Intégrer cette équation en utilisant la méthode du facteur intégrant (multiplication de l'équation par $\dot{\theta}$) et en déduire que $\dot{\theta}$ s'écrit :

   $$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{r}\left[\cos(\alpha) - \cos(\theta)\right] + \frac{v_\mathrm{B}^2}{r^2}}$$

   c) Déterminer l'expression de l'action normale $\mathrm{N}'(\theta)$ exercée par la piste sur le palet.

   d) En déduire à quelle condition sur v_B il n'y aura pas décollage avant le sommet ; puis la condition correspondante sur v_A : on déterminera une vitesse limite v_{A,ℓ_2} fonction de g, r et α en précisant s'il s'agit d'une limite inférieure ou supérieure, au-delà de laquelle le palet décolle avant d'arriver en C. Calculer numériquement v_{A,ℓ_2} et indiquer si la condition est vérifiée.

   e) On note E le point de la piste situé entre C et D où le palet quitte la piste. Déterminer l'expression θ_E de l'angle θ correspondant, en fonction de α, v_B, g et r.
   Effectuer l'application numérique (on donnera le résultat en degrés).

   f) En déduire l'expression du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_\mathrm{E}}$ dans la base $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$, ainsi que l'expression de $v_\mathrm{E} = ||\overrightarrow{v_\mathrm{E}}||$ en fonction de α, v_B, g et r.
   Effectuer l'application numérique.

3. Le palet a désormais quitté la piste. On pose $t'' = 0$ l'instant où ceci se produit, et comme précédemment on notera t au lieu de t''. On se place dans le repère (O, x, z), et on note β l'angle entre $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{v_\mathrm{E}}$.

   a) Exprimer l'angle β en fonction de θ_E.

   b) Indiquer le nom générique qu'on donne au mouvement du palet dans cette troisième phase.

   c) Expliquer uniquement avec des arguments physiques (donc sans calculs !) pourquoi il est inutile d'introduire un troisième axe (O, y) pour étudier le mouvement du palet.

   d) Établir les coordonnées $x(t)$ et $z(t)$ du palet en fonction de v_E, β, r et g (et t !).

   e) Déterminer l'instant τ' où le palet touche le sol, en fonction de v_E, β, r et g. Calculer τ'.

   f) L'objectif est que le palet arrive dans un trou circulaire, centré sur le point F situé à 28 cm de D. Le trou a un un diamètre $2\,\ell = 10$ cm. Indiquer si le trou est atteint.

♫