

CHIMIE, ONDES ET MÉCANIQUE DU POINT

I. Pile au lithium de Philae



I.2 $K^0 \approx 10^{233}$ à 25 °C.

I.2.a Comme l'activité d'un solide seul dans sa phase et celle d'un solvant vaut 1, on a :

$$Q_r = \frac{a_S a_{\text{SO}_2} a_{\text{LiCl}}^4}{a_{\text{Li}}^4 a_{\text{SOCl}_2}^2} = \frac{[\text{S}] [\text{SO}_2]}{(c^0)^2}$$

I.2.b À l'instant initial, il n'y a ni S, ni SO₂ donc $[\text{S}] = [\text{SO}_2] = 0$. On a donc $Q_r(t=0) = 0$.

I.2.c Une fois l'équilibre atteint $Q_{r,\text{éq}} = K^0 = 10^{233}$

I.2.d Puisque $K^0(25 \text{ °C}) \gg 1$, la réaction est totale.

I.2.e Le chlorure de thionyle étant le solvant, il est peu probable qu'il soit choisi comme réactif limitant. En revanche, le Li_(s) peut s'épuiser avant que l'équilibre ne soit atteint puisque son activité vaut 1. La pile s'arrête alors de fonctionner avant l'équilibre.

I.3 Masse initiale de Li dans une cellule

★ Nombre d'électrons ayant circulé à l'arrêt de la pile : $N_e = \frac{Q_{\text{cell}}}{e}$

★ Quantité de matière d'électrons correspondante : $n_e = \frac{N_e}{\mathcal{N}_A} = \frac{Q_{\text{cell}}}{e \mathcal{N}_A}$

★ Quantité de matière de Li correspondante : $n_{\text{Li}} = \frac{n_e}{4} = \frac{Q_{\text{cell}}}{4 e \mathcal{N}_A}$

★ Masse de Li correspondante : $m_{\text{Li}} = n_{\text{Li}} M_{\text{Li}} = \frac{Q_{\text{cell}} M_{\text{Li}}}{4 e \mathcal{N}_A} \approx 65 \text{ mg}$

Masse minimale de SOCl₂

Compte tenu des coefficients stœchiométriques, et puisque Li est le réactif limitant :

$$n_{\text{SOCl}_2} > \frac{n_{\text{Li}}}{2} \iff m_{\text{SOCl}_2, \text{min}} = M_{\text{SOCl}_2} \frac{n_{\text{Li}}}{2}$$

d'où

$$m_{\text{SOCl}_2, \text{min}} = M_{\text{SOCl}_2} \frac{Q_{\text{cell}}}{8 e \mathcal{N}_A} \approx 0,56 \text{ g}$$

I.4 Intensité moyenne

Par définition, $i = \frac{dq}{dt}$ où dq est la charge ayant circulé pendant la durée dt. On en déduit :

$$I_{\text{moy}} = \frac{N Q_{\text{cell}}}{\tau} \approx 64 \text{ A}$$

Puissance moyenne consommée

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{E}{\tau} \approx 1,7 \text{ kW}$$

À titre de comparaison, un moteur de lave-linge à l'essorage consomme entre 200W et 300W.

II. Célérité et enregistrement d'un son

II.1 Le son ne se propage pas dans le vide. Il nécessite un milieu matériel élastique, par exemple l'air. Les tranches d'air sont comprimées, puis dilatées lors de la propagation d'un signal sonore (analogie possible avec les spires d'un ressort). Il s'agit donc d'une onde mécanique longitudinale, c'est-à-dire dont la perturbation associée est colinéaire à la direction de propagation.

II.2 La célérité du son dans l'air vérifie une loi du type $v = k P^\alpha \rho^\beta$.

II.2.a Une pression est homogène à une force sur une surface, soit :

$$\dim(P) = \frac{\dim(F)}{\dim(S)} = \frac{\dim(m) \dim(a)}{\dim(S)} = \frac{M L T^{-2}}{L^2} = M L^{-1} T^{-2}$$

Une masse volumique s'exprime en kg.m^{-3} . On en déduit que $\dim(\rho) = M L^{-3}$.

La relation $v = k P^\alpha \rho^\beta$ donne l'équation aux dimensions suivante :

$$L T^{-1} = (M L^{-1} T^{-2})^\alpha (M L^{-3})^\beta = M^{\alpha+\beta} L^{-\alpha-3\beta} T^{-2\alpha}$$

D'où
$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{1}{2} \quad \text{ou encore} \quad v = k \sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

II.2.b i. Comme il s'agit d'un gaz parfait et en introduisant le masse molaire de l'air M_{air} (en kg.mol^{-1}).

$$P V = n R T \quad \rightarrow \quad P = \frac{m}{M_{\text{air}}} \frac{R T}{V} = \frac{\rho R T}{M_{\text{air}}} \quad \rightarrow \quad \frac{P}{\rho} = \frac{R T}{M_{\text{air}}}$$

d'où

$$v = k \sqrt{\frac{R T}{M_{\text{air}}}}$$

ii. On a directement
$$M_{\text{air}} = x(\text{O}_2) M(\text{O}_2) + x(\text{N}_2) M(\text{N}_2)$$

Application numérique :
$$M_{\text{air}} = 29 \text{ g.mol}^{-1}$$

II.3 Pour l'air, $k = \sqrt{\gamma_{\text{air}}}$. Ainsi,
$$v_{\text{th}} = \sqrt{\frac{\gamma_{\text{air}} R T}{M_{\text{air}}}}$$

Application numérique :
$$v_{\text{th}} = 3,44 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$$

II.4 Le microphone M_A reçoit le signal de la source avec le retard $\frac{S M_A}{v_{\text{exp}}}$ et le microphone M_B de même avec le retard $\frac{S M_B}{v_{\text{exp}}}$. Le décalage temporel entre les deux microphones correspond donc à

$$\tau = \frac{M_A M_B}{v_{\text{exp}}} \quad \Leftrightarrow \quad v_{\text{exp}} = \frac{d_1}{\tau} \quad \text{et} \quad u(v_{\text{exp}}) = v_{\text{exp}} \times \sqrt{\left(\frac{u(d_1)}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{u(\tau)}{\tau}\right)^2}$$

Application numérique :
$$v_{\text{exp}} = (342 \pm 5) \text{ m.s}^{-1}$$

Comme $v_{\text{th}} \in [v_{\text{exp,min}}; v_{\text{exp,max}}]$, il y a un bon accord avec le modèle précédent à la même température.

II.5 Haut-parleur et microphone

II.5.a Le signal décrivant l'onde en S peut s'écrire (en choisissant une phase à l'origine des temps et de l'espace nulle) :

$$y(S, t) = A \cos \underbrace{\left(\frac{2\pi}{T} t \right)}_{\varphi(S, t)}$$

II.5.b En un point M de l'axe (Sx), et comme l'onde est progressive dans le sens des x croissants :

$$y(M, t) = A \cos \underbrace{\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x_M \right)}_{\varphi(M, t)}$$

II.5.c La différence de phase de M par rapport à S est donc, lorsque $x_M > 0$:

$$\Delta\varphi = \varphi(M, t) - \varphi(S, t) = -2\pi \frac{x_M}{\lambda}$$

II.5.d Les vibrations sont en phase si la distance SM est un multiple entier de la période spatiale ou longueur d'onde λ :

$$\Delta\varphi \equiv 2\pi [2\pi] \iff x_M = p\lambda = p \frac{v}{f_{\text{pha}}} \text{ avec } p \in \mathbb{N}^*$$

d'où

$$f_{\text{pha}} = p \frac{v}{x_M} \text{ avec } p \in \mathbb{N}^*$$

À 20 °C, les trois plus petites valeurs de f_{pha} sont :

$p = 1$ $\Delta\varphi = 2\pi$	$p = 2$ $\Delta\varphi = 4\pi$	$p = 3$ $\Delta\varphi = 6\pi$
$f_{\text{pha}} = 1,7 \cdot 10^2$ Hz	$f_{\text{pha}} = 3,4 \cdot 10^2$ Hz	$f_{\text{pha}} = 5,1 \cdot 10^2$ Hz

II.5.e Les vibrations sont en opposition de phase si la distance SM est un multiple demi-entier de la période spatiale ou longueur d'onde λ :

$$\Delta\varphi \equiv \pi [2\pi] \iff x_M = \left(q + \frac{1}{2} \right) \lambda = \left(q + \frac{1}{2} \right) \frac{v}{f_{\text{opp}}} \text{ avec } q \in \mathbb{N}$$

d'où

$$f_{\text{opp}} = \left(q + \frac{1}{2} \right) \frac{v}{x_M} \text{ avec } q \in \mathbb{N}$$

À 20 °C, les trois plus petites valeurs de f_{opp} sont :

$q = 0$ $\Delta\varphi = \pi$	$q = 1$ $\Delta\varphi = 3\pi$	$q = 2$ $\Delta\varphi = 5\pi$
$f_{\text{opp}} = 8,6 \cdot 10^1$ Hz	$f_{\text{opp}} = 2,6 \cdot 10^2$ Hz	$f_{\text{opp}} = 4,3 \cdot 10^2$ Hz

II.6 Utilisation de l'oscilloscope

II.6.a La fréquence de 500 Hz ne correspond pas à une des fréquences particulières déterminées à la question précédente. Il existe donc un déphasage $\Delta\varphi$ différent de 0 ou π entre le microphone et le haut-parleur. Sa valeur se calcule à partir de sa définition.

$$\Delta\varphi = -2\pi \frac{x_M}{\lambda} = -2\pi \frac{x_M f}{v} = -18,4 \text{ rad} = -5,84\pi \text{ rad}$$

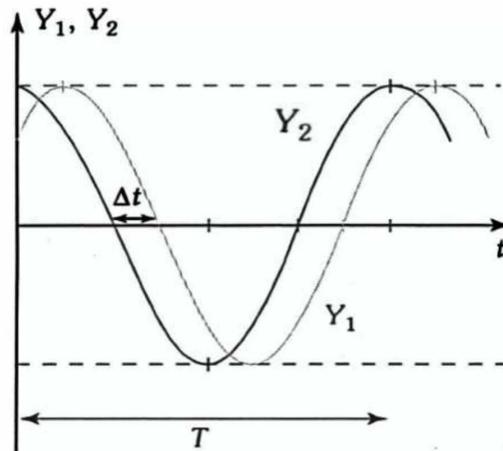
En remplaçant $\Delta\varphi$ entre $]-\pi; \pi]$, on obtient :

$$\Delta\varphi = 0,16\pi \text{ rad} = 0,50 \text{ rad} = 29^\circ$$

On observe donc sur l'écran deux sinusoïdes déphasées, celle du micro étant en avance de phase de $1,6 \cdot 10^{-1} \pi \text{ rad} = 29^\circ$ sur celle de la source.

II.6.b Comme $\Delta\varphi = 0,16\pi \text{ rad}$, on observe donc sur l'écran deux sinusoïdes déphasées, celle du micro étant en avance de phase de sur celle de la source.

La représentation est la suivante :



II.6.c Pour mesurer le déphasage $\Delta\varphi$ à l'oscilloscope, il suffit de mesurer le décalage temporel Δt correspondant. Comme un déphasage de 2π correspond à un décalage temporel d'une période T , on en déduit :

$$\Delta\varphi = \pm 2\pi \frac{\Delta t}{T} \quad \text{en radians}$$

II.6.d Si on veut que la source et le micro soient en phase en déplaçant le micro d'une distance minimale d' , il faut imposer un déphasage de $\Delta\varphi = -6\pi$, c'est-à-dire imposer que M soit à une nouvelle abscisse x'_M telle que

$$x'_M = 3\lambda = 3 \frac{v}{f}$$

d'où

$$d' = x'_M - x_M = 3 \frac{v}{f} - x_M$$

On doit donc déplacer le microphone de $d' = 5,5 \text{ cm}$ en l'éloignant de la source.

III. Manège

III.1 Trajectoire

Au point A, on a $\theta = 0$ et $r = 2R \times 2 = 4R$.

Au point B, on a $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $r = 2R$.

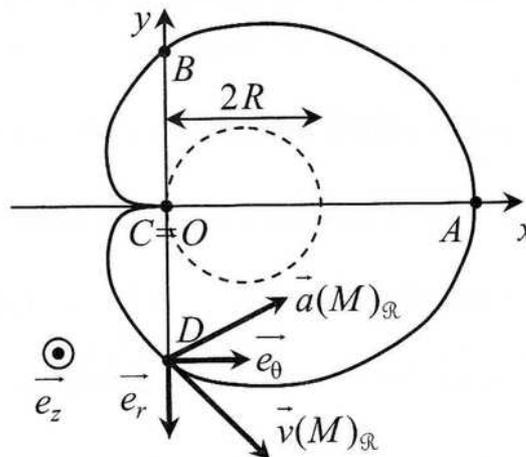
Au point C, on a $\theta = \pi$ et $r = 2R(1 - 1) = 0$.

Au point D, on a $\theta = \frac{3\pi}{2}$ et $r = 2R$.

De plus, d'après l'équation de la trajectoire, on voit que pour chaque θ , il existe un unique r correspondant. La trajectoire ne se recoupe donc pas.

On voit aussi que r diminue sur l'intervalle $\theta \in [0, \pi]$, car la fonction cosinus est alors décroissante, et r augmente sur l'intervalle $\theta \in [\pi, 2\pi]$ car la fonction cosinus est croissante sur cet intervalle.

Finalement, la trajectoire du point M a l'allure ci-contre.



ATTENTION! La trajectoire n'est pas circulaire, \vec{e}_θ n'est donc pas tangent à la trajectoire et \vec{e}_r n'est pas normal à la trajectoire.

III.2 Vitesse

III.2.a Le vecteur position est $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$

avec $r = 2R(1 - \cos(\theta))$, $\theta = \omega t$ (donc $\dot{\theta} = \omega$) et $z = 0$

On en déduit

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = -2R\dot{\theta}\sin(\theta)\vec{e}_r + 2R\omega(1 + \cos(\theta))\vec{e}_\theta$$

d'où

$$\vec{v} = -2R\omega\sin(\omega t)\vec{e}_r + 2R\omega(1 + \cos(\omega t))\vec{e}_\theta$$

Comme en tous les points, le vecteur vitesse est en D tangent à la trajectoire.

III.2.b $\|\vec{v}\| = \sqrt{[-2R\omega\sin(\omega t)]^2 + [2R\omega(1 + \cos(\omega t))]^2} = \sqrt{4R^2\omega^2[\sin^2(\omega t) + (1 + \cos(\omega t))^2]}$

$$\text{Soit } \|\vec{v}\| = 2R\omega\sqrt{1 + 2\cos(\omega t) + \underbrace{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}_{=1}} = 2R\omega\sqrt{2[1 + \cos(\omega t)]}$$

$$\text{Or } [1 + \cos(\omega t)] = 2\cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

$$\text{Donc } \|\vec{v}\| = 2R\omega\sqrt{2 \times 2\cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)}$$

$$\text{d'où } \|\vec{v}\| = 4R\omega\left|\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right|$$

III.2.c v est maximale lorsque $\left| \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right| = \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|$ est maximal, c'est-à-dire lorsque

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = k\pi$$

d'où

$$\theta = 2k\pi : \text{cela correspond au point A.}$$

La vitesse vaut alors

$$\vec{v}_A = -2R\omega \sin(2k\pi) \vec{e}_r + 2R\omega(1 + \cos(2k\pi)) \vec{e}_\theta = 4R\omega \vec{e}_\theta$$

Or, au point A, $\vec{e}_\theta = \vec{e}_y$.

L'enfant risque d'être éjecté dans la direction \vec{e}_y .

III.2.d La vitesse est nulle lorsque $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$.

d'où

$$\theta = \pi + 2k\pi : \text{l'enfant peut donc descendre au point C.}$$

III.3 Accélération

III.3.a Par définition $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (-2R\omega \sin(\omega t) \vec{e}_r + 2R\omega(1 + \cos(\omega t)) \vec{e}_\theta)$

$$\vec{\gamma} = -2R\omega\omega \cos(\omega t) \vec{e}_r - 2R\omega \sin(\omega t) \underbrace{\dot{\theta}}_{=\omega} \vec{e}_\theta + 2R\omega(-\omega \sin(\omega t)) \vec{e}_\theta + 2R\omega(1 + \cos(\omega t)) \underbrace{(-\dot{\theta})}_{=\omega} \vec{e}_r$$

$$\vec{\gamma} = 2R\omega^2(-1 - 2\cos(\omega t)) \vec{e}_r - 4R\omega^2 \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$$

d'où

$$\vec{\gamma} = -2R\omega^2(1 + 2\cos(\omega t)) \vec{e}_r - 4R\omega^2 \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$$

III.3.b Au point D, $\theta = \frac{3\pi}{2}$, donc $\cos(\omega t) = \cos(\theta) = 0$ et $\sin(\omega t) = \sin(\theta) = -1$.

d'où

$$\vec{\gamma}_D = -2R\omega^2 \vec{e}_r + 4R\omega^2 \vec{e}_\theta$$

La composante de l'accélération suivant \vec{e}_θ est donc 2 fois plus importante que la composante de l'accélération suivant \vec{e}_r . Cette accélération a été représentée sur le premier schéma.

III.3.c $\|\vec{\gamma}\| = 2R\omega^2 \sqrt{[1 + 2\cos(\omega t)]^2 + [-2\sin(\omega t)]^2}$

$$\|\vec{\gamma}\| = 2R\omega^2 \sqrt{4\sin^2(\omega t) + 1 + 4\cos(\omega t) + 4\cos^2(\omega t)}$$

d'où

$$\|\vec{\gamma}\| = 2R\omega^2 \sqrt{5 + 4\cos(\omega t)}$$

III.3.d L'accélération est maximale lorsque $\cos(\omega t) = \cos(\theta)$ est maximal.

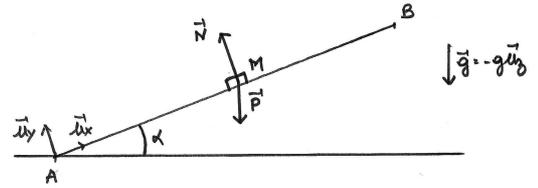
$$\theta = 0 : \text{l'enfant risque de se sentir mal au point A.}$$

IV. Parcours mouvementé

IV.1 Trajectoire rectiligne.

- IV.1.a** *
- * Référentiel : terrestre supposé galiléen ;
 - * Système : palet assimilé à un point matériel $M(m)$;
 - * Hypothèses : pas de frottements ;
 - * Bilan des forces s'exerçant sur m :

- le poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg \sin(\alpha)\vec{u}_X - mg \cos(\alpha)\vec{u}_Y$
- l'action de la rampe $\vec{N} = N\vec{u}_Y$



Le principe fondamental de la dynamique (PFD) s'écrit à $m = C^{te}$:
$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{P} + \vec{N}}{m}$$

NB : Le système et le référentiel resteront inchangés tout au long du problème.

IV.1.b
$$\overrightarrow{AM} = X(t)\vec{u}_X \quad \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} = \dot{X}(t)\vec{u}_X \quad \vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{X}(t)\vec{u}_X$$

IV.1.c On projette le PFD sur \vec{u}_X : $m\ddot{X} = -mg \sin(\alpha)$

En intégrant par rapport à t , il vient $\dot{X} - \dot{X}(0) = -g \sin(\alpha)t$. Comme $\dot{X}(0) = v_A$, on a directement

$$v(t) = v_A - g \sin(\alpha)t$$

En intégrant une nouvelle fois : $X(t) - X(0) = v_A t - \frac{1}{2}g \sin(\alpha)t^2$. Comme $X(0) = 0$, on a

$$X(t) = v_A t - \frac{1}{2}g \sin(\alpha)t^2$$

IV.1.d Le point B est atteinte lorsque $X(\tau) = AB$. Or, le triangle OAB est rectangle en B donc $AB = \frac{r}{\tan(\alpha)}$. On a donc $X(\tau) = v_A \tau - \frac{1}{2}g \sin(\alpha)\tau^2 = \frac{r}{\tan(\alpha)}$.

τ est donc solution de l'équation : $\frac{1}{2}g \sin(\alpha)\tau^2 - v_A \tau + \frac{r}{\tan(\alpha)} = 0$.

Le discriminant est $\Delta = v_A^2 - 2gr \cos(\alpha)$

On n'aura une solution que si $\Delta \geq 0 \iff v_A > v_{A,\ell_1}$ avec $v_{A,\ell_1} = \sqrt{2gr \cos(\alpha)} \approx 5,9 \text{ m.s}^{-1} < v_A$.
Donc le point B est atteint.

On obtient deux valeurs possibles pour τ : $\tau_{\pm} = \frac{v_A \pm \sqrt{\Delta}}{g \sin(\alpha)}$ et, conformément à l'énoncé, on retient la plus petite des deux :

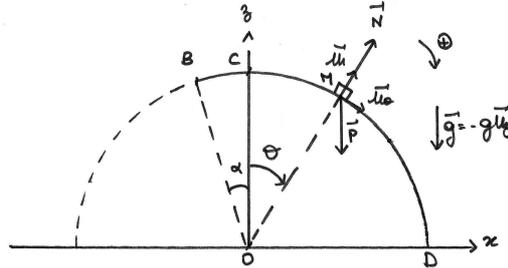
$$\tau = \tau_- = \frac{v_A - \sqrt{v_A^2 - 2gr \cos(\alpha)}}{g \sin(\alpha)} \approx 0,75 \text{ s}$$

IV.1.e $v_B = v(\tau) = v_A - g \sin(\alpha)\tau \iff v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gr \cos(\alpha)} \approx 2,8 \text{ m.s}^{-1}$

IV.1.f On projette le PFD sur \vec{u}_Y : $0 = -mg \cos(\alpha) + N$

d'où

$$N = mg \cos(\alpha) \approx 0,87 \text{ N}$$

IV.2 Étude du parcours de la portion courbe BCD.**IV.2.a** On propose le schéma suivant :★ Hypothèses : frottements à nouveau négligés ;★ Bilan des forces s'exerçant sur m :• le poids : $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \cos(\theta) \vec{u}_r + mg \sin(\theta) \vec{u}_\theta$ • l'action de la rampe $\vec{N}' = N' \vec{u}_r$ ★ Cinématique : $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ $\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ $\vec{\gamma} = r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$ Le PFD s'écrit à $m = C^{te}$:
$$m \vec{\gamma} = \vec{P} + \vec{N}'$$
La projection du PFD sur \vec{u}_θ donne :

$$mr \ddot{\theta} = mg \sin(\theta)$$

d'où

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{r} \sin(\theta)$$

IV.2.b Pour intégrer cette équation, on utilise la technique du facteur intégrant (multiplication de l'équation par $\dot{\theta}$) :

$$\dot{\theta} \ddot{\theta} = \frac{g}{r} \sin(\theta) \dot{\theta} \iff \frac{d\left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2\right)}{dt} = \frac{g}{r} \frac{d(-\cos(\theta))}{dt}$$

En intégrant par rapport à t , il vient :

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}(0)^2 = -\frac{g}{r} (\cos(\theta) - \cos(\theta(0)))$$

Les conditions initiales sont ici $\theta(0) = -\alpha$ et $\dot{\theta}(0) = \frac{v_B}{r}$.Donc
$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \frac{v_B^2}{r^2} = -\frac{g}{r} (\cos(\theta) - \cos(\alpha))$$
Comme $\dot{\theta} \geq 0$

$$\dot{\theta} = +\sqrt{\frac{2g}{r} [\cos(\alpha) - \cos(\theta)] + \frac{v_B^2}{r^2}}$$

IV.2.c La projection du PFD suivant \vec{u}_r donne :

$$-mr\dot{\theta}^2 = N' - mg \cos(\theta)$$

$$N' = m \left[g \cos(\theta) - r\dot{\theta}^2 \right] = m \left[g \cos(\theta) - 2g (\cos(\alpha) - \cos(\theta)) - \frac{v_B^2}{r} \right]$$

d'où

$$N'(\theta) = m \left[3g \cos(\theta) - 2g \cos(\alpha) - \frac{v_B^2}{r} \right]$$

IV.2.d Tant que le palet est en contact avec la piste, $N'(\theta) > 0$. Ceci doit être vérifié pour tout $\theta \in [-\alpha, 0]$. Or, $N'(\theta)$ est une fonction décroissante de θ . Il faut et il suffit donc que

$$N'(-\alpha) > 0 \iff g \cos(\alpha) - \frac{v_B^2}{r} \geq 0 \iff v_B < \sqrt{gr \cos(\alpha)}$$

D'après la question 1)e), $v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gr \cos(\alpha)}$. La condition précédente sur v_B se réécrit :

$$\sqrt{v_A^2 - 2gr \cos(\alpha)} < \sqrt{gr \cos(\alpha)}$$

d'où

$$v_A < v_{A,\ell_2} \text{ avec } v_{A,\ell_2} = \sqrt{3gr \cos(\alpha)}$$

L'application numérique donne $v_{A,\ell_2} \approx 7,2 \text{ m.s}^{-1} > v_A$ donc la condition est vérifiée ici.

IV.2.e Tant que le palet est sur la piste, $N'(\theta) > 0$, soit :

$$m \left[3g \cos(\theta) - 2g \cos(\alpha) - \frac{v_B^2}{r} \right] > 0$$

ou encore

$$\cos(\theta) > \frac{2}{3} \cos(\alpha) + \frac{v_B^2}{3gr}$$

Cette condition sera donc rompue en

$$\theta_E = \text{Arccos} \left[\frac{2}{3} \cos(\alpha) + \frac{v_B^2}{3gr} \right] \approx 45^\circ$$

car $\theta_E > 0$

IV.2.f D'après l'étude cinématique de la question a) : $\vec{v}_E = r\dot{\theta}_E \vec{u}_{\theta_E}$. Et d'après la question b) :

$$\dot{\theta}_E = +\sqrt{\frac{2g}{r} [\cos(\alpha) - \cos(\theta_E)]} + \frac{v_B^2}{r^2}$$

$$\dot{\theta}_E = +\sqrt{\frac{2g}{r} \left[\frac{1}{3} \cos(\alpha) - \frac{v_B^3}{3gr} \right]} + \frac{v_B^2}{r^2}$$

$$\dot{\theta}_E = +\sqrt{\frac{2g}{3r} \cos(\alpha) + \frac{v_B^2}{3r^2}}$$

d'où

$$\vec{v}_E = \sqrt{\frac{1}{3} (2gr \cos(\alpha) + v_B^2)} \vec{u}_{\theta_E}$$

Par conséquent

$$V_E = \|\vec{v}_E\| = \sqrt{\frac{1}{3} (2gr \cos(\alpha) + v_B^2)} \approx 3,8 \text{ m.s}^{-1}$$

IV.3 Le palet a désormais quitté la piste.

$$\text{IV.3.a} \quad \beta = (\vec{u}_x, \vec{v}_E) = (\vec{u}_x, \vec{u}_{\theta_E}) = (\vec{u}_z, \vec{u}_{r_E})$$

d'où

$$\boxed{\beta = \theta_E}$$

IV.3.b Soumis à son seul poids (on néglige les frottements de l'air), le palet est en chute libre.

IV.3.c Le mouvement initial du palet (décrit par \vec{v}_E) se fait dans le plan (O, x, z) et aucune force orthogonale à ce plan ne s'exerce sur le palet : il restera donc dans le plan (O, x, z) .

IV.3.d
 * Hypothèses : chute libre ;
 * Bilan des forces s'exerçant sur m :

• le poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$

Le PFD s'écrit $m\vec{\gamma} = \vec{P}$

Les projections du PFD sur \vec{u}_x et \vec{u}_z donnent :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}$$

La condition initiale sur la vitesse est $\vec{v}(0) = \vec{v}_E = v_E (\cos(\beta)\vec{u}_x - \sin(\beta)\vec{u}_z)$.

L'intégration de la projection du PFD donne

$$\dot{x} = v_E \cos(\beta) \quad \text{et} \quad \dot{z} = -gt - v_E \sin(\beta)$$

La condition initiale sur le vecteur position est $\vec{OM}(t=0) = \vec{OE} = r (\sin(\beta)\vec{u}_x + \cos(\beta)\vec{u}_z)$.

L'intégration de la vitesse donne

$$\boxed{x(t) = v_E \cos(\beta)t + r \sin(\beta) \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 - v_E \sin(\beta)t + r \cos(\beta)}$$

IV.3.e L'instant τ' où le palet touche le sol est tel que $z(\tau') = 0$. En utilisant la question précédente :

$$-\frac{1}{2}g\tau'^2 - v_E \sin(\beta)\tau' + r \cos(\beta) = 0$$

Le discriminant Δ est $\Delta = v_E^2 \sin^2(\beta) + 2gr \cos \beta > 0$

d'où
$$\boxed{\tau' = \frac{1}{g} \left(-v_E \sin(\beta) + \sqrt{v_E^2 \sin^2(\beta) + 2gr \cos(\beta)} \right) \approx 0,33 \text{ s}}$$

On n'a gardé que la solution > 0 .

IV.3.f On s'intéresse alors à $x(\tau')$:

$$x(\tau') = v_E \cos(\beta)\tau' + r \sin(\beta) \approx 2,29 \text{ m}$$

Or, $x_F = r + DF \approx 2,28 \text{ m}$. Donc $x(\tau') \in [x_F - \ell; x_R + \ell]$.

Le trou est atteint par le palet.

