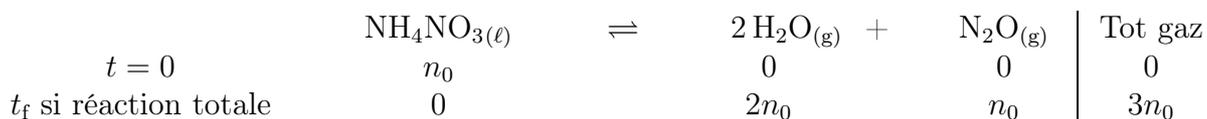


ÉLECTROCINÉTIQUE EN RSF ET CINÉTIQUE CHIMIQUE

I. Le protoxyde d'azote : un gaz prétendument « fun »

I.1 Comme $K^0 \gg 1$ et que le réactif est un corps condensé pur, on fait l'hypothèse d'une réaction totale et on réalise le bilan de matière correspondant (en moles) :



Dans ce cadre, on trouve un état final constitué de 2,00 mol de $\text{H}_2\text{O}(\text{g})$ et de 1,00 mol de $\text{N}_2\text{O}(\text{g})$. On a donc une quantité totale $n_{\text{tot}} = 3n_0 = 3,00$ mol de gaz, d'où la pression dans l'enceinte :

$$P = \frac{n_{\text{tot}}RT}{V} = 13,0 \text{ bar}$$

On peut alors calculer les pressions partielles :

$$P_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{n_{\text{H}_2\text{O}}}{n_{\text{tot}}} P = \frac{2}{3} P = 8,64 \text{ bar}$$

$$P_{\text{N}_2\text{O}} = \frac{n_{\text{N}_2\text{O}}}{n_{\text{tot}}} P = \frac{1}{3} P = 4,32 \text{ bar}$$

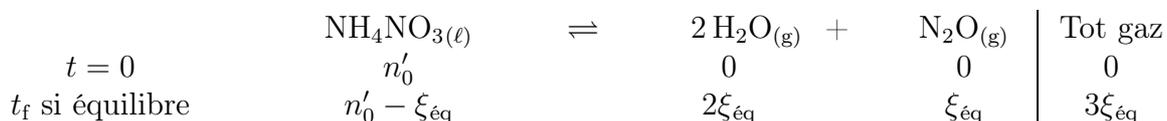
Pour valider l'hypothèse, on calcule le quotient réactionnel final, au moment où la rupture d'équilibre se produit :

$$Q_f = \frac{(P_{\text{H}_2\text{O}})^2 \times P_{\text{N}_2\text{O}}}{(P^0)^3} = 322$$

On a bien $Q_f < K^0$, ce qui valide l'hypothèse : la rupture d'équilibre s'est bien produite avant que l'état d'équilibre n'ait été atteint. On peut donc conclure :

L'état final contient uniquement une phase gazeuse, à la pression $P = 13,0$ bar, contenant 2,00 mol de $\text{H}_2\text{O}(\text{g})$ et de 1,00 mol de $\text{N}_2\text{O}(\text{g})$.

I.2 On fait cette fois l'hypothèse que l'on a apporté une quantité de nitrate d'ammonium n'_0 suffisante pour que l'état final soit un état d'équilibre. Le bilan en quantité de matière est donc :



On calcule alors l'avancement $\xi_{\text{éq}}$ en appliquant la loi de Guldberg et Waage :

On exprime
$$P_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{2\xi_{\text{éq}}RT}{V} \quad \text{et} \quad P_{\text{N}_2\text{O}} = \frac{\xi_{\text{éq}}RT}{V}$$

$$K^0 = Q_{\text{éq}} = 4 (\xi_{\text{éq}})^3 \times \frac{R^3 T^3}{V^3 (P^0)^3}$$

On en déduit :

$$\xi_{\text{éq}} = \left(\frac{K^0}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \times \frac{VP^0}{RT} = 3,1 \cdot 10^{19} \text{ mol}$$

Pour que cet état d'équilibre soit atteint, il faut donc apporter une quantité de nitrate d'ammonium telle que $n'_0 > \xi_{\text{éq}}$:

$$n'_0 > 3, 1.10^{19} \text{ mol}$$

Ce résultat est bien entendu inatteignable en pratique. On ne pourrait même pas faire tenir une quantité aussi importante dans l'enceinte !

I.3 Pour une réaction exothermique, K^0 diminue quand la température augmente. Si on souhaite que la valeur de K^0 soit plus faible :

Il faut se placer à une température plus élevée que 520 K.

I.4 L'expression générale du quotient réactionnel dans une situation d'équilibre est donnée par la relation de Guldberg et Waage :

$$K^0 = Q_{\text{éq}} = \frac{(P_{\text{H}_2\text{O}})^2 \times P_{\text{N}_2\text{O}}}{(P^0)^3}$$

À partir d'un état d'équilibre où la relation précédente est valide, on effectue une perturbation. On exprime alors le quotient réactionnel de telle manière qu'on puisse déterminer l'effet de notre perturbation sur la valeur de Q .

I.4.a On exprime le quotient réactionnel en fonction de la valeur que l'on va modifier ($n_{\text{H}_2\text{O}}$) et du volume et de la température qui sont constants. Pour cela, on exprime les pressions partielles par la loi des gaz parfaits, $P_i = \frac{n_i RT}{V}$. On obtient :

$$Q = \frac{(n_{\text{H}_2\text{O}})^2 \times n_{\text{N}_2\text{O}} \times R^3 T^3}{V^3 P^0}$$

Ainsi, si on part d'un état d'équilibre où $Q = K^0$, si on augmente $n_{\text{H}_2\text{O}}$ en maintenant $n_{\text{N}_2\text{O}}$, V et T constants, alors Q va augmenter. On aura alors $Q > K^0$:

le système va donc évoluer spontanément dans le sens indirect pour retrouver l'équilibre.

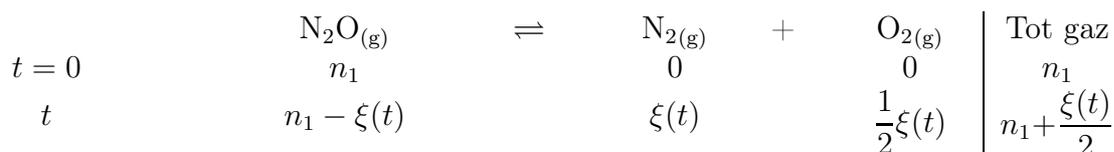
I.4.b On exprime le quotient réactionnel en fonction de la valeur que l'on va modifier (n_{tot} car on injecte un gaz inerte) et de la pression car elle est constante. Pour cela, on utilise l'expression $P_i = x_i P = \frac{n_i}{n_{\text{tot}}} P$ pour les pressions partielles et on obtient :

$$Q = \frac{(n_{\text{H}_2\text{O}}^2) n_{\text{N}_2\text{O}}}{(n_{\text{tot}})^3} \left(\frac{P}{P^0} \right)^3$$

Ainsi, si on part d'un état d'équilibre où $Q = K^0$, si on augmente n_{tot} en injectant de l'argon à $n_{\text{H}_2\text{O}}$, $n_{\text{N}_2\text{O}}$, P et T constantes, alors Q va diminuer. On aura alors $Q < K^0$:

le système va donc évoluer spontanément dans le sens direct pour retrouver l'équilibre.

I.5 On réalise un tableau d'avancement :



D'après la notation de l'énoncé, on a une quantité : $n(t) = n_1 - \xi(t)$ de N_2O à l'instant t .

D'où $\xi(t) = n_1 - n(t)$

D'après la loi des gaz parfaits, la pression dans l'enceinte vaut :

$$P(t) = \frac{n_{\text{tot}}(t)RT}{V} = \frac{\left(n_1 + \frac{\xi(t)}{2}\right)RT}{V} = \frac{\left(\frac{3}{2}n_1 - \frac{1}{2}n(t)\right)RT}{V} = \frac{3}{2} \frac{n_1 RT}{V} - \frac{RT}{2V} n(t)$$

Or à l'instant initial, la pression valait $P_1 = \frac{n_1 RT}{V}$, d'où la relation demandée :

$$P(t) - \frac{3}{2}P_1 = -\frac{RT}{2V}n(t)$$

I.6 En dérivant la relation précédente, on obtient :

$$\frac{dP}{dt}(t) = -\frac{RT}{2V} \frac{dn}{dt}(t)$$

Par conséquent : $v(t) = -\frac{1}{V} \frac{dn}{dt}(t) = \frac{2}{RT} \frac{dP}{dt}(t)$

$$v(t) = \frac{2}{RT} \frac{dP}{dt}(t)$$

I.7 La réaction étant d'ordre 1 d'après l'énoncé, on a : $v(t) = k \frac{n(t)}{V}$

En égalant avec la relation de la question précédente, on obtient :

$$k \frac{n(t)}{V} = \frac{2}{RT} \frac{dP}{dt}(t)$$

Or, d'après la question 5, la quantité de matière est liée à la pression par :

$$n(t) = \frac{2V}{RT} \left(\frac{3}{2}P_1 - P(t) \right)$$

Donc $\frac{2k}{RT} \left(\frac{3}{2}P_1 - P(t) \right) = \frac{2}{RT} \frac{dP}{dt}(t)$

d'où $\frac{dP}{dt}(t) + kP(t) = \frac{3}{2}kP_1$

I.8 La solution s'écrit $P(t) = C^{\text{te}} \exp(-kt) + \frac{3}{2}P_1$

À $t = 0$ $P(0) = P_1 = C^{\text{te}} + \frac{3}{2}P_1 \iff C^{\text{te}} = -\frac{1}{2}P_1$

Et finalement $P(t) = \frac{P_1}{2} (3 - \exp(-kt))$

I.9 On isole l'exponentielle et on linéarise en passant au \ln :

$$P(t) - \frac{3}{2}P_1 = -\frac{P_1}{2} \exp(-kt) \quad \Leftrightarrow \quad \exp(-kt) = 3 - 2\frac{P(t)}{P_1}$$

$$-kt = \ln\left(3 - 2\frac{P(t)}{P_1}\right)$$

La grandeur $\ln\left(3 - 2\frac{P(t)}{P_1}\right)$ est bien proportionnelle au temps t , avec le coefficient de proportionnalité $-k$.

I.10 On reporte les points dans un graphe donnant

$$t \text{ en abscisse} \quad \text{et} \quad \ln\left(3 - 2\frac{P(t)}{P_1}\right) \text{ en ordonnées}$$

On doit obtenir des points qui s'alignent sur une droite de pente $-k$ et d'ordonnée à l'origine 0. Une régression linéaire du type $y = ax + b$ donne :

$$a = -1,102 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1} \quad b = 7,587 \cdot 10^{-5} \quad \text{et} \quad R^2 = 0,9998$$

On en déduit

$$k = 1,10 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

I.11 Le temps de demi-réaction τ est la durée au bout de laquelle la moitié de N_2O a été consommée. Ainsi, à $P(\tau)$, on a : $n(\tau) = \frac{n_1}{2}$. En injectant dans la relation de la question 5, on trouve :

$$P(\tau) - \frac{3}{2}P_1 = -\frac{RT}{4V}n_1 = -\frac{P_1}{4}$$

$$P(\tau) = \frac{5}{4}P_1$$

Donc, grâce à la relation de la question 9, on déduit :

$$-k\tau = \ln\left(3 - \frac{5}{4}\right) = -\ln(2)$$

d'où

$$\tau = \frac{\ln(2)}{k} = 62,8 \text{ s}$$

Cette valeur est indépendante de la quantité apporté n_1 (réaction d'ordre 1), mais dépendante de la température car k dépend de la température.

I.12 La loi d'Arrhénius permet d'exprimer la constante cinétique en fonction de la température :

$$\ln\left(\frac{k(T_1)}{k(T_2)}\right) = -\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$

d'où
$$\frac{k(T_1)}{k(T_2)} = \frac{\tau'}{\tau} = \exp\left(-\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right)$$

d'où

$$\tau' = \tau \times \exp\left(-\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right) = 1,70 \text{ ms}$$

I.13 À cette température, plus de la moitié de N_2 se décompose en 1,7 ms. Cela fait donc augmenter la pression brutalement, ce qui augmente la puissance à laquelle le piston est repoussé et donc la puissance du moteur.

II. Modélisation de la partie électrique d'un haut-parleur électrodynamique

II.1 La loi des mailles s'écrit
$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} - e(t)$$

II.2 On a immédiatement
$$u(t) = U_m \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad \omega = 2\pi f$$

II.3 Il s'agit du régime que l'on observe lorsqu'un système physique est soumis à une excitation sinusoïdale et que le régime transitoire a disparu. On observe alors que toutes les grandeurs physiques du système oscillent sinusoïdalement à la pulsation de l'excitation.

II.4 On se retrouve en régime sinusoïdal forcé et toutes les équations qui régissent le système sont linéaires : on peut donc utiliser la notation complexe.

On a donc
$$u(t) = \text{Re}(\underline{u}(t)) \quad \text{avec} \quad \underline{u}(t) = U_m \exp(j\omega t)$$

II.5 Équation électrique
$$\underline{u} - R\underline{i} - jL\omega\underline{i} + jB\ell\omega\underline{z} = 0$$

Équation mécanique
$$-m\omega^2\underline{z} = -\ell B\underline{i} - k\underline{z} - j\lambda\omega\underline{z}$$

II.6 L'équation électrique donne
$$\underline{z} = \frac{-\underline{u} + (R + jL\omega)\underline{i}}{jB\ell\omega}$$

Cette expression de \underline{z} réinjectée dans l'équation mécanique donne

$$\ell B\underline{i} = (m\omega^2 - k - j\lambda\omega) \times \frac{-\underline{u} + (R + jL\omega)\underline{i}}{jB\ell\omega}$$

d'où
$$[jB^2\ell^2\omega - (m\omega^2 - k - j\lambda\omega)(R + jL\omega)]\underline{i} = -(m\omega^2 - k - j\lambda\omega)\underline{u}$$

d'où
$$\underline{Z}(\omega) = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{-jB^2\ell^2\omega}{m\omega^2 - k - j\lambda\omega} + (R + jL\omega)$$

II.7 Comme deux impédances en série s'ajoutent, on en déduit que :

$$\underline{Z}(\omega) = \underline{Z}_e(\omega) + \underline{Z}_m(\omega)$$

Compte tenu de l'expression de $\underline{Z}(\omega)$ et des contraintes sur \underline{Z}_e et \underline{Z}_m , on peut poser :

$$\underline{Z}_e(\omega) = R + jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z}_m(\omega) = \frac{-jB^2\ell^2\omega}{m\omega^2 - k - j\lambda\omega}$$

II.8 L'admittance motionnelle s'écrit
$$\underline{Y}_m(\omega) = \frac{1}{\underline{Z}_m(\omega)}$$

D'où
$$\underline{Y}_m(\omega) = j \frac{m\omega}{B^2\ell^2} + \frac{k}{jB^2\ell^2\omega} + \frac{\lambda}{B^2\ell^2}$$

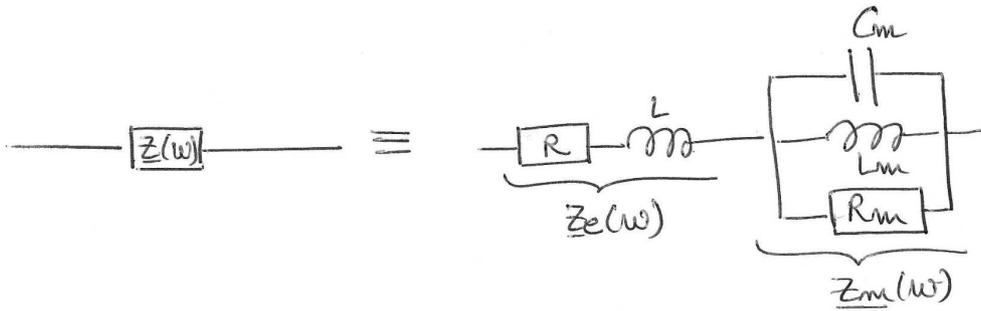
En identifiant avec la forme proposée, il vient :

$$C_m = \frac{m}{B^2\ell^2} \quad L_m = \frac{B^2\ell^2}{k} \quad \text{et} \quad R_m = \frac{B^2\ell^2}{\lambda}$$

Applications numériques :

$$C_m \approx 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ F} \quad L_m \approx 1,28 \cdot 10^{-2} \text{ H} \quad R_m \approx 16 \text{ } \Omega$$

II.9 On peut proposer le schéma électrique suivant :



II.10 $R_T = \text{Re} (Z(\omega)) = \text{Re} (Z_e(\omega)) + \text{Re} (Z_m(\omega))$

Donc

$$R_T = R + \text{Re} \left(\frac{1}{jC_m\omega + \frac{1}{jL_m\omega} + \frac{1}{R_m}} \right)$$

$$R_T = R + \text{Re} \left(\frac{\frac{1}{R_m} + j \left(\frac{1}{L_m\omega} - C_m\omega \right)}{\frac{1}{R_m^2} + \left(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega} \right)^2} \right)$$

Finalement

$$R_T = R + \frac{R_m}{1 + R_m^2 \left(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega} \right)^2}$$

II.11 D'après l'expression obtenue à la question précédente : $\lim_{\omega \rightarrow 0} (R_T) = R$.

D'où par lecture graphique

$$R \approx 8,0 \, \Omega$$

On relève graphiquement

$$\omega_0 \approx 5,8 \cdot 10^2 \, \text{rad.s}^{-1}$$

d'où

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 92 \, \text{Hz}$$

La détermination de f_0 par le calcul se fait en écrivant que $\frac{dR_T}{d\omega}(\omega_0) = 0$.

Cela se traduit par $R_m^2 \times 2 \left(C_m\omega_0 - \frac{1}{L_m\omega_0} \right) \times \left(C_m + \frac{1}{L_m\omega_0^2} \right) = 0$

D'où

$$C_m\omega_0 - \frac{1}{L_m\omega_0} = 0$$

Finalement

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_m C_m}}$$

Application numérique :

$$\omega_0 \approx 89 \, \text{Hz}$$

La valeur attendue est donc bien cohérente avec celle lue sur le graphique.

II.12 La décomposition en série de Fourier permet de décomposer tout signal en une somme de signaux sinusoïdaux (composantes du signal).

On peut sommer les réponses du système à chacune des composantes pour reconstituer la réponse au signal d'entrée.

II.13 On relève graphiquement :

$$\omega_{\eta_{\max}} \approx 5,6 \cdot 10^2 \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{donc} \quad f_{\eta_{\max}} = \frac{\omega_{\eta_{\max}}}{2\pi} \approx 89 \text{ Hz}$$

On constate que $f_{\eta_{\max}}$ est très proche de f_0 . Ceci peut s'expliquer de la façon suivante :

- ★ La résistance électrique du circuit vaut $\approx 8 \Omega$ (d'après la question 11). Or, elle est la seule responsable de la dissipation électrique de puissance, c'est-à-dire des pertes énergétiques du haut-parleur. Comme R est très faible, on aura une faible dissipation électrique de puissance.
- ★ L'essentiel de la dissipation de puissance est donc mécanique et due à λ (frottements avec l'air) : ceci correspond à la puissance qu'on souhaite dissiper (le but est de faire vibrer l'air devant la membrane).

On s'attend donc à ce que le rendement soit maximal pour des paramètres très proches de ceux pour lesquels la dissipation de puissance sera maximale.

- ★ La puissance moyenne consommée par le haut-parleur vaut :

$$P_{\text{moy}} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$$

où U_{eff} et I_{eff} sont les valeurs efficaces de $u(t)$ et $i(t)$, et $\varphi = \arg(\underline{Z})$.

Or, on a également $\underline{u} = \underline{Z}i$ donc $U_{\text{eff}} = |\underline{Z}| I_{\text{eff}}$. On obtient donc en remplaçant :

$$P_{\text{moy}} = I_{\text{eff}}^2 |\underline{Z}| \cos(\varphi) = I_{\text{eff}}^2 \text{Re}(\underline{Z}) = R_T I_{\text{eff}}^2$$

Donc, pour une valeur donnée de I_{eff} , P_{moy} sera maximale lorsque R_T sera maximale, donc en f_0 .

II.14 On a $\eta \geq 0,5$ pour $\omega_0 \in [5,3 \cdot 10^2, 5,9 \cdot 10^2] \text{ rad.s}^{-1}$. Comme $f = \frac{\omega}{2\pi}$, il est intéressant d'utiliser le haut-parleur sur la gamme de fréquences :

$$f \in [84, 94] \text{ Hz}$$

L'oreille humaine entend les sons entre 20Hz et 20kHz.

Le haut-parleur étudié est donc plutôt destiné à la restitution des sons graves.

II.15 Une enceinte à plusieurs haut-parleurs permet une meilleure restitution des sons, en exploitant au mieux la gamme de rendement maximal de chaque haut-parleur. En effet, on construit les différents haut-parleurs avec des caractéristiques différentes pour qu'ils soient adaptés aux sons graves, aux sons aigus ou aux médiums.

III. Détection d'un obstacle mobile

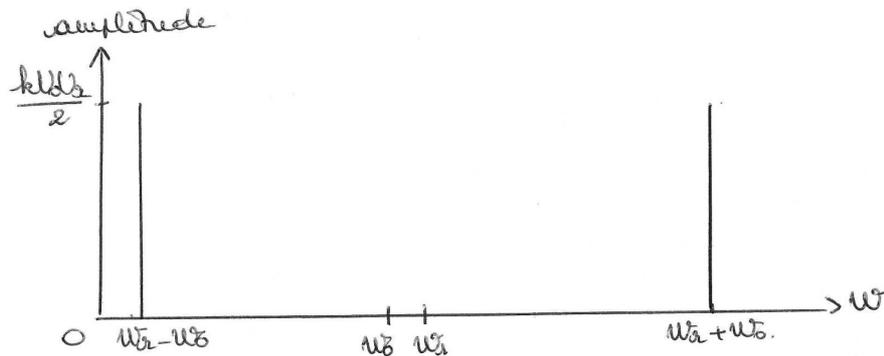
III.1 On exprime $u_e(t)$ comme une somme :

$$u_e(t) = k u_0(t) u_r(t) = k U_0 U_r \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_r t + \varphi)$$

ou encore
$$u_e(t) = k U_0 U_r \times \frac{1}{2} [\cos(\omega_0 t + \omega_r t + \varphi) + \cos(\omega_r t - \omega_0 t + \varphi)]$$

Finalement
$$u_e(t) = \frac{k U_0 U_r}{2} \cos((\omega_0 + \omega_r)t + \varphi) + \frac{k U_0 U_r}{2} \cos((\omega_r - \omega_0)t + \varphi)$$

L'allure du spectre en pulsation est la suivante :



III.2 Puisque $\omega = 2\pi f$, on a $\omega_r = \omega_0 \left(1 + 2\frac{V}{c}\right)$, de sorte que :

$$\omega_r - \omega_0 = 2\omega_0 \frac{V}{c} \quad \text{et} \quad \omega_r + \omega_0 = 2\omega_0 \left(1 + \frac{V}{c}\right)$$

On a donc intérêt à conserver la composante $\omega_r - \omega_0$ car sa fréquence est proportionnelle à V , qu'on veut mesurer.

Puisqu'on veut garder la composante de fréquence la plus basse, on a intérêt à utiliser un filtre passe-bas, dont la pulsation de coupure doit vérifier :

$$\omega_c \in [\omega_r - \omega_0; \omega_r + \omega_0]$$

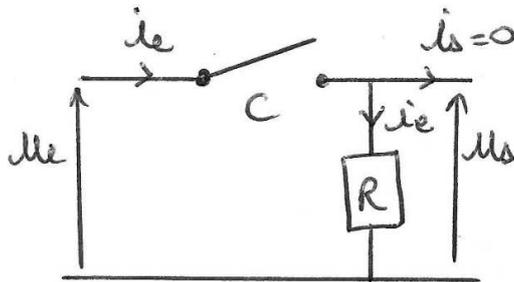
soit donc

$$\omega_c \in [1, 5.10^3; 5, 0.10^5] \text{ rad.s}^{-1}$$

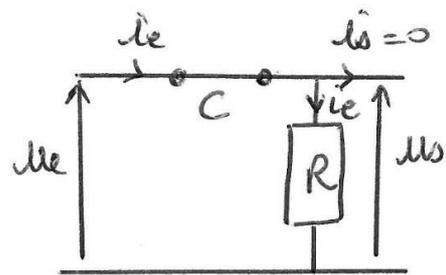
Choisir $\omega_c \approx 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$ paraît être une bonne solution.

III.3 On étudie les trois filtres à basse fréquence (schémas de gauche) et à haute fréquence (schémas de droite) :

★ Filtre n°1 :



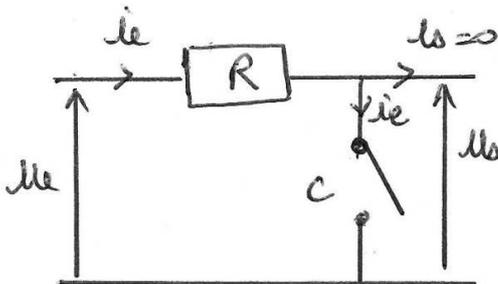
$$i_e = 0 \text{ donc } u_s = Ri_e = 0$$



$$u_s = u_e$$

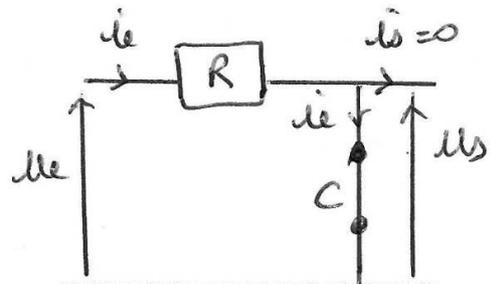
Le filtre n°1 est un filtre passe-haut.

★ Filtre n°2 :



$$i_e = 0 \text{ donc } u_R = Ri_e = 0$$

$$u_s = u_e$$

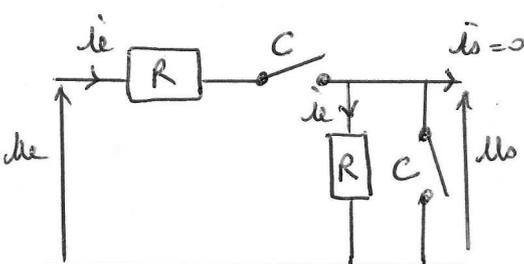


u_s est la tension aux bornes d'un fil

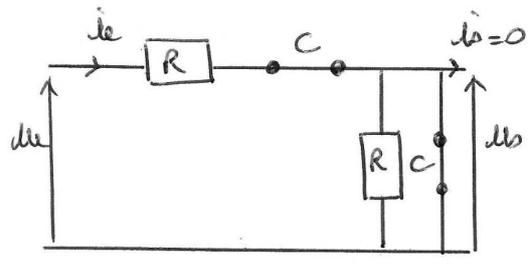
$$u_s = 0$$

Le filtre n°2 est un filtre passe-bas.

★ Filtre n°3 :



$$i_e = 0 \text{ donc } u_s = Ri_e = 0$$



$$u_s = 0$$

Le filtre n°3 est un filtre passe-bande.

Le filtre recherché est donc le filtre n°2.

III.4 Comme on est en régime sinusoïdal forcé et que les dipôles sont linéaires, on peut utiliser la notation complexe.

En reconnaissant un pont diviseur de tension, il vient :

$$\underline{u}_s = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} \underline{u}_e$$

d'où

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Par définition

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$$

avec $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$

Or,

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}$$

donc

$$G_{\max} = G(0) = 1$$

On a donc

$$\frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d'où

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

III.5 On souhaite

$$G(\omega_0 + \omega_r) = \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 + \omega_r}{\omega_c}\right)^2}} = \frac{1}{100}$$

d'où

$$\omega_c = \frac{\omega_0 + \omega_r}{\sqrt{9999}}$$

Application numérique :

$$\omega_c \approx 5,0 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$$

L'atténuation de la composante basse fréquence se traduit par

$$G(\omega_r - \omega_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 - \omega_r}{\omega_c}\right)^2}}$$

Application numérique :

$$G(\omega_0 - \omega_r) \approx 0,96 = 96\%$$

Le signal qu'on souhaite conserver ne perd donc que 4% de son amplitude, ce qui est très peu : le filtre ainsi constitué correspond parfaitement à l'usage qu'on souhaite en faire

