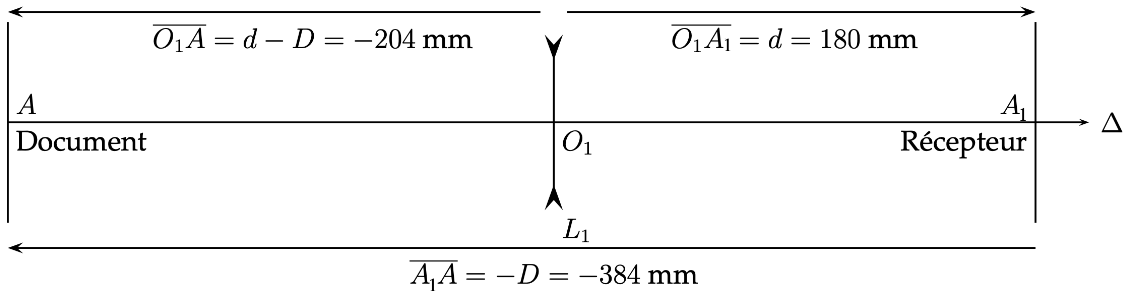
Optique géométrique et électrocinétique

I. Objectif de photocopieur



I.1 Soit A_1 l'image de A par la lentille L_1 : $A \xrightarrow{L_1} A_1$

En orientant l'axe optique du système optique dans le sens de propagation de la lumière (de A vers le récepteur), pour que A_1 soit sur le récepteur, il faudrait :

$$\overline{O_1A_1} = d > 0 \text{ (image réelle) pour } \overline{O_1A} = d - D < 0 \text{ (objet réel)}$$

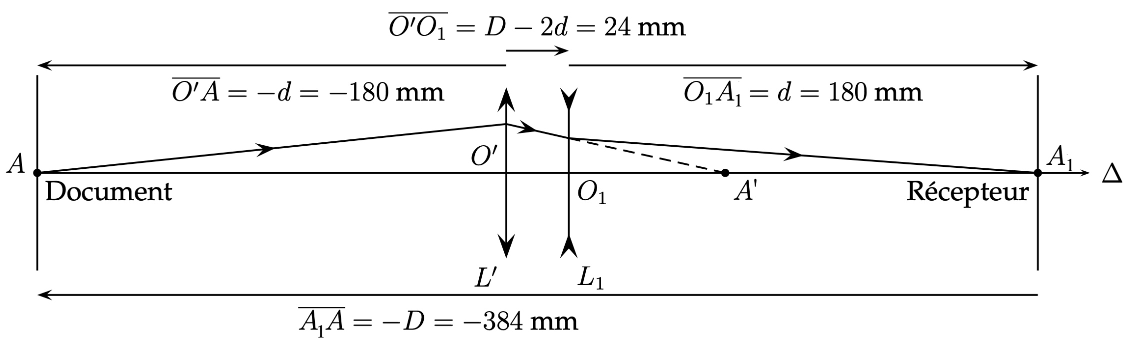
Or
$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{f'_1}$$

Comme $f'_1 < 0$ et $\overline{O_1A} < 0$, on a forcément $\overline{O_1A_1} < 0$, donc une image virtuelle.

Il est donc impossible de d'obtenir une image réelle à partir d'un objet réel avec une lentille divergente et

$$\boxed{\text{A}_1 \text{ ne peut pas se trouver en sur le récepteur.}}$$

I.2 Ajout de L′ (qui s'avérera convergente), on complète la figure de l'énoncé pour plus de lisibilité.



I.2.a On note A′ l'image de A par L′, A_1 est l'image de A′ par L_1 :

$$A \xrightarrow{(L',O',f')} A' \xrightarrow{(L_1,O_1,f'_1)} A_1$$

Par application de la relation de conjugaison de Descartes sur L_1, on peut écrire :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A'}} = \frac{1}{f'_1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\overline{O_1A'}} = \frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{f'_1} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f'_1}$$

$$\boxed{\overline{O_1A'} = \frac{f'_1 d}{f'_1 - d}}$$

I.2.b De même, la relation de conjugaison appliquée à L′ s'écrit

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{O'A'}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{O'A}}} = \frac{1}{f'} \qquad \Rightarrow \qquad f' = \frac{\overline{\mathrm{O'A'}}.\overline{\mathrm{O'A}}}{\overline{\mathrm{O'A}} - \overline{\mathrm{O'A'}}}$$

avec $\overline{\mathrm{O'A'}} = \overline{\mathrm{O'O_1}} + \overline{\mathrm{O_1A'}} = \mathrm{D} - 2d + \dfrac{f_1'd}{f_1' - d}$ et $\overline{\mathrm{O'A}} = -d$

d'où

$$\boxed{f' = \frac{-d \times \left(\mathrm{D} - 2d + \dfrac{f_1'd}{f_1'-d}\right)}{d - \mathrm{D} - \dfrac{f_1'd}{f_1'-d}}}$$

I.2.c *Application numérique :* $\boxed{f' \approx 57,3 \text{ mm}}$

$\boxed{f' > 0 : \text{la lentille L}' \text{ est convergente.}}$

I.2.d On propose les notations suivantes :

$$\mathrm{AB} \overset{(\mathrm{L}',\mathrm{O}',f')}{\longrightarrow} \mathrm{A'B'} \overset{(\mathrm{L}_1,\mathrm{O}_1,f_1')}{\longrightarrow} \mathrm{A_1B_1}$$

On peut décomposer le grandissement γ_a de l'ensemble sous la forme :

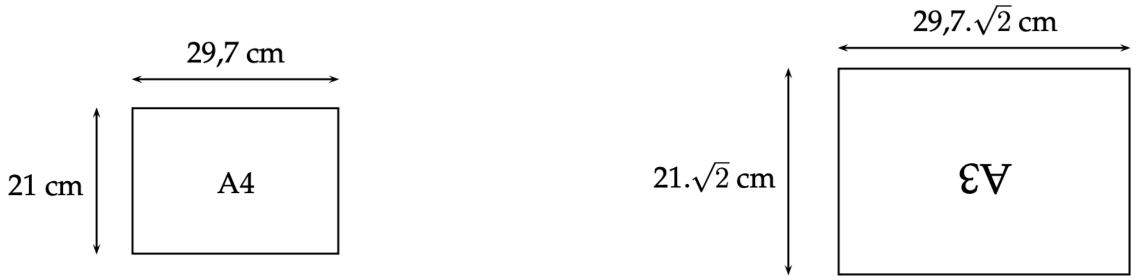
$$\gamma_a = \frac{\overline{\mathrm{A_1B_1}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\overline{\mathrm{A_1B_1}}}{\overline{\mathrm{A'B'}}}.\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$$

Soit

$$\gamma_a = \frac{\overline{\mathrm{O_1A_1}}}{\overline{\mathrm{O_1A'}}}.\frac{\overline{\mathrm{O'A'}}}{\overline{\mathrm{O'A}}}$$

En fonction des données $\boxed{\gamma_a = \dfrac{f_1' - d}{f_1'} \times \dfrac{\mathrm{D} - 2d + \dfrac{f_1'd}{f_1'-d}}{-d}}$

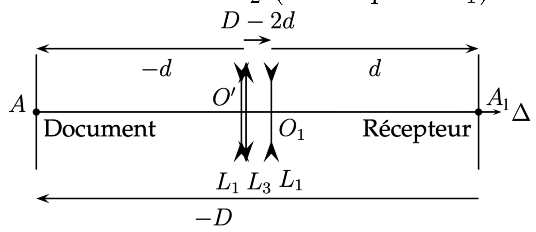
I.2.e *Application numérique :* $\boxed{\gamma_a \approx -1,4}$



L'image finale est donc inversée et chacune de ses dimensions (largeur et hauteur) est multipliée par environ $1,4 \approx \sqrt{2}$, la surface est donc doublée.

$\boxed{\text{On a affaire à un tirage du type A4 vers A3.}}$

I.3 L′ est constituée de deux lentilles accolées L_2 (identique à L_1) et L_3 :



I.3.a Notons O le centre optique commun des deux lentilles ($O_1 \simeq O_2 \simeq O$), on a

$$\mathrm{A} \xrightarrow{\text{Lentille } \mathrm{L_{eq}}\, :\, \frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{1}{f'_{\mathrm{eq}}}} \mathrm{A'}$$

Ou encore $$\mathrm{A} \xrightarrow{\mathrm{L_1}\, :\, \frac{1}{\overline{\mathrm{OA_1}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{1}{f'_1}} \mathrm{A_1} \xrightarrow{\mathrm{L_2}\, :\, \frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA_1}}} = \frac{1}{f'_2}} \mathrm{A'}$$

En sommant les deux relations de Descartes, on obtient :

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$$

d'où $$\boxed{\frac{1}{f'_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}}$$

I.3.b En appliquant la formule ci-avant au doublet accolé L' constitué des lentilles L_1 et L_3, on obtient immédiatement

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_3}$$

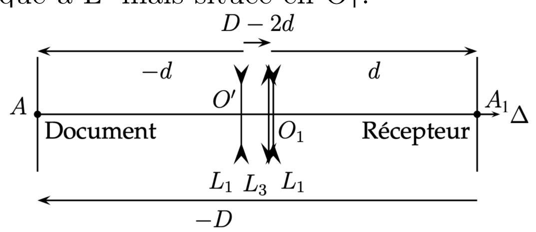
d'où $$\boxed{f'_3 = \frac{f'.f'_1}{f'_1 - f'}}$$

I.3.c *Application numérique :* $\boxed{f'_3 \approx 35,0 \text{ mm}}$

$\boxed{f'_3 > 0 : \text{la lentille } \mathrm{L_3} \text{ est convergente.}}$

I.4 L_3 glissée contre L_1.

I.4.a En glissant L_3 contre L_1 comme représenté sur la figure ci-après, on forme l'équivalent d'une nouvelle lentille, identique à L' mais située en O_1.



$\boxed{\text{La lentille nouvellement constituée a pour distance focale image } f' \approx 57,3 \text{ mm.}}$

I.4.b On est dans ce cas dans une version « symétrique » du premier cas. Par principe du retour inverse de la lumière, l'image finale reste bien sur le récepteur.

I.4.c *Application numérique :* $\boxed{\gamma_{\mathrm{b}} \approx -0,71}$

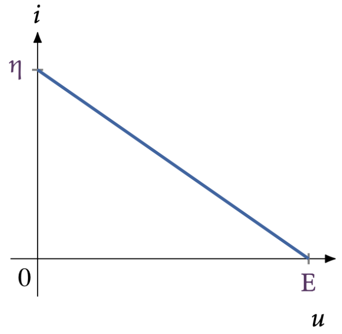
L'image finale est donc inversée et chacune de ses dimensions (largeur et hauteur) est divisée par environ $1,4 \approx \sqrt{2}$, la surface est donc réduite de moitié.

$\boxed{\text{On a affaire à un tirage du type A4 vers A5.}}$

II. Ponts électriques

II.1 On reconnaît un pont diviseur de tension :

$$\boxed{\frac{u_2}{u_{\text{tot}}} = \frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2}} \qquad (\mathbf{1})$$



II.2 Caractéristique.

II.2.a On a (ATTENTION !, convention générateur sur le résistor !) :

$$u = \mathrm{E} - r\,i$$

Sa caractéristique est représentée ci-contre.

II.2.b Un voltmètre idéal ayant une résistance infinie, le courant débité par le générateur sera donc nul et on aura $\boxed{u = \mathrm{E}}$

II.2.c Un ampèremètre idéal ayant une résistance nulle, le courant débité par le générateur sera donc le courant électromoteur $\boxed{\eta = \dfrac{\mathrm{E}}{r}}$

II.2.d $\boxed{\text{L'ohmmètre est branché sur le résistor : il indique } r.}$

II.3 La question 2. indique qu'on obtient la résistance interne du générateur lorsqu'on remplace le générateur par un fil. En opérant de même avec le circuit proposé entre A et B, on se retrouve avec l'association suivante :

$$(\mathrm{R}_1 // \mathrm{R}_2) \text{ en série avec } \mathrm{R}_3 \text{ et } \mathrm{R}_4$$

D'où

$$\boxed{\mathrm{R}_{\text{Th}} = \frac{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2} + \mathrm{R}_3 + \mathrm{R}_4}$$

La question 2. indique qu'on obtient la f.é.m du générateur lorsqu'on branche un voltmètre idéal à ses bornes. En branchant un voltmètre idéal entre A et B, il n'y a de courant ni dans R_3 ni dans R_4.

Ainsi

$$\boxed{\mathrm{E}_{\text{Th}} = \frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2}\mathrm{E}} \qquad \text{(pont diviseur de tension)}$$

II.4 Tension U_{AB} et équilibre du pont.

II.4.a Le courant dans un voltmètre idéal est nul. On a donc deux associations série de résistors. L'expression (**1**) donne, en notant $\mathrm{U}_{\mathrm{R}_2}$ la tension aux bornes de R_2 dirigée vers A et $\mathrm{U}_{\mathrm{R}_4}$ la tension aux bornes de R_4 dirigée vers B :

$$\mathrm{U}_{\mathrm{R}_2} = \frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2}\,\mathrm{E} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}_{\mathrm{R}_4} = \frac{\mathrm{R}_4}{\mathrm{R}_3 + \mathrm{R}_4}\,\mathrm{E}$$

Comme

$$\mathrm{U}_{\text{AB}} = \mathrm{U}_{\mathrm{R}_2} - \mathrm{U}_{\mathrm{R}4}$$

Il vient

$$\boxed{\mathrm{U}_{\text{AB}} = \left(\frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2} - \frac{\mathrm{R}_4}{\mathrm{R}_3 + \mathrm{R}_4}\right)\mathrm{E}} \qquad (\mathbf{2})$$

II.4.b Pour $\mathrm{U}_{\text{AB}} = 0$, on a

$$\frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2} - \frac{\mathrm{R}_4}{\mathrm{R}_3 + \mathrm{R}_4} = 0$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{R}_1\,\mathrm{R}_4 = \mathrm{R}_2\,\mathrm{R}_3}$$

II.5 R_1 varie en fonction de la température θ.

II.5.a On doit avoir

$$R_1(0\ °C)\,R_4 = R_2\,R_3$$

d'où

$$\boxed{R_0 = \frac{R_2\,R_3}{R_4}}$$

Application numérique : $\boxed{R_0 = 25\ \Omega}$

II.5.b Pour $\theta \neq 0$ °C, le pont n'est plus équilibré et la relation (**2**) donne :

$$U_{AB} = \frac{R_2R_3 - R_1R_4}{(R_1+R_2)\,(R_3+R_4)}\,E$$

En remplaçant R_1 par $R_0\ (1+\theta/\theta_0)$, U_{AB} s'écrit

$$U_{AB} = \frac{R_2R_3 - R_4R_0\ (1+\theta/\theta_0)}{(R_0\ (1+\theta/\theta_0)+R_2)\,(R_3+R_4)}\,E$$

En utilisant le fait que $R_0 = R_2 = R_3 = R_4$ et le fait que $\theta/\theta_0 \ll 1$, il vient

$$\boxed{U_{AB} \simeq -\frac{E\,\theta}{4\,\theta_0}} \qquad (\mathbf{3})$$

II.5.c *Application numérique :* $\boxed{U_{AB} \approx -90\ \text{mV}}$

II.6 Prise en compte de R_V.

II.6.a La force électromotrice du générateur est directement la tension U_{AB} de l'expression (**3**) mesurée par le voltmètre :

$$\boxed{E_{eq} \simeq -\frac{E\,\theta}{4\,\theta_0}}$$

On détermine sa résistance interne en déterminant la résistance équivalente R_{eq} du dispositif quand on remplace le générateur par un fil. Le dipôle est alors équivalent à l'association série des associations parallèles $R_1//R_2$ et $R_3//R_4$, soit :

$$\boxed{R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}} \qquad \text{avec } R_1 = R_0\ (1+\theta/\theta_0)$$

II.6.b Le circuit est équivalent à l'association série du générateur linéaire équivalent de la question précédente en série avec le résistor R_V. Un pont diviseur de tension assure immédiatement que :

$$\boxed{U_{AB} = \frac{R_V}{R_V+R_{eq}}E_{eq}}$$

II.7 La relation du pont de Wheatstone s'écrit ici :

$$\mathrm{R}_1\left(\mathrm{R}_x+\lambda\left(\ell-z_1\right)\right)=\mathrm{R}_2\left(\mathrm{R}_y+\lambda z_1\right) \tag{4}$$

d'où
$$\boxed{z_1=\frac{\mathrm{R}_1\left(\mathrm{R}_x+\lambda \ell\right)-\mathrm{R}_2 \mathrm{R}_y}{\lambda\left(\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2\right)}}$$

II.8 On intervertit ensuite les résistors R_x et R_y dans l'expression précédente :

$$\mathrm{R}_1\left(\mathrm{R}_y+\lambda\left(\ell-z_2\right)\right)=\mathrm{R}_2\left(\mathrm{R}_x+\lambda z_2\right) \tag{5}$$

La différence des égalités (**4**) et (**5**) donne alors :

$$\mathrm{R}_1\left(\mathrm{R}_x-\mathrm{R}_y+\lambda\left(z_2-z_1\right)\right)=\mathrm{R}_2\left(\mathrm{R}_y-\mathrm{R}_x+\lambda\left(z_1-z_2\right)\right)$$

Ou encore
$$\left(\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2\right)\left(\mathrm{R}_x-\mathrm{R}_y\right)=\left(\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2\right) \lambda\left(z_1-z_2\right)$$

$$\boxed{\mathrm{R}_x-\mathrm{R}_y=\lambda\left(z_1-z_2\right) \text{ : la mesure de } z_2-z_1 \text{ donne bien accès à } \mathrm{R}_x-\mathrm{R}_y}$$

Au maximum, $z_1-z_2=\ell$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la valeur maximale mesurable pour } \mathrm{R}_x-\mathrm{R}_y \text{ est } \lambda\,\ell.}$$

♫