

DM9 : Forces centrales et thermodynamique

Le travail en groupe est fortement encouragé, vous pouvez rendre une copie par groupe de 3. Attention, tous les membres du groupe doivent avoir fait tout le DM ! Il ne s'agit pas de partager le travail.

Exercice 1 : DE LA TERRE À LA LUNE

Ce problème aborde quelques aspects du Programme Apollo, qui permit à l'Homme de faire son premier pas sur la Lune le 21 juillet 1969.

1 De la Terre ...

La fusée, lancée de Cap Canaveral en Floride, se met tout d'abord en orbite circulaire basse autour de la Terre. Elle est ensuite placée sur une orbite elliptique de transfert pour rejoindre finalement une orbite circulaire autour de la Lune. La durée d'une mission est typiquement d'une semaine.

1.1 Influence de la base de lancement

La Terre, assimilée à une sphère de rayon $R_T = 6,38 \cdot 10^3$ km, est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Sud-Nord Tz , à la vitesse angulaire $\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5}$ rad s $^{-1}$.

Jusqu'à la question 13 comprise, \mathcal{R}_G le référentiel géocentrique sera le référentiel d'étude, considéré comme galiléen.

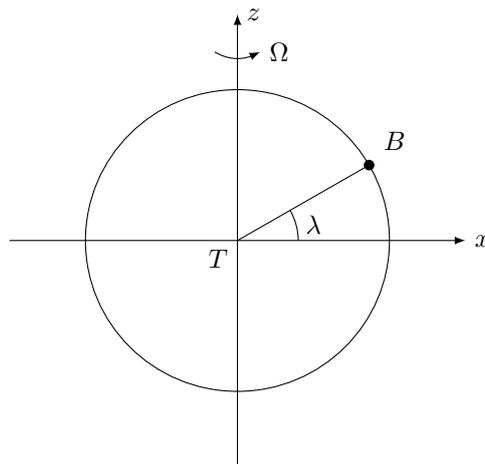


FIGURE 1 – Schéma de la Terre avec la base de lancement en B

- Donner la nature de la trajectoire d'un point B à la surface de la Terre, situé à la latitude λ .
En déduire l'expression du module v_B de sa vitesse.

Une fusée de masse m_F décolle du point B , sans vitesse initiale par rapport à la Terre, pour atteindre une orbite circulaire autour de la Terre avec la vitesse finale v_0 par rapport à \mathcal{R}_G .

- Déterminer la variation d'énergie cinétique ΔE_c de la fusée, en fonction de v_B , v_0 et m_F .
- En déduire s'il est plus intéressant de choisir la base de Kourou en Guyane ($\lambda_2 = 5,16^\circ$) plutôt que celle de Cap Canaveral aux Etats-unis ($\lambda_1 = 28,5^\circ$).

1.2 Orbite circulaire

- Rappeler l'expression de la force gravitationnelle \vec{F}_G exercée par une masse ponctuelle m_1 située en O sur une masse ponctuelle m_2 située en M en fonction de m_1 , m_2 , $\vec{r} = \vec{OM}$, $r = \|\vec{r}\|$ et la constante de gravitation \mathcal{G} .

Un satellite de masse m_F est en orbite autour de la Terre à la distance r de son centre.

- Déterminer l'expression de l'énergie potentielle E_{p0} associée, en la choisissant nulle pour $r \rightarrow \infty$.

La trajectoire est maintenant considérée circulaire de rayon r .

6. Déterminer la vitesse v_0 de la fusée et son énergie cinétique E_{c0} , en fonction de \mathcal{G} , m_F , m_T et r .
7. Déterminer le rapport $\frac{T_0^2}{r^3}$, où T_0 est la période de révolution du satellite, en fonction de \mathcal{G} et m_T .
Quel est le nom de cette loi? Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r par a , demi-grand axe de l'ellipse.
8. Application numérique : calculer v_0 et T_0 pour une orbite circulaire basse ($r \simeq R_T$) .
On donne $\mathcal{G} \times m_T = 3,99 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$.
9. Déterminer enfin l'expression de l'énergie mécanique de la fusée sous la forme $E_{m0} = -\frac{K}{2r}$, en précisant l'expression de K . Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r par a , demi-grand axe de l'ellipse.

2 ... à la Lune.

2.1 Objectif Lune

Orbite de transfert

La fusée Saturn V est d'abord placée en orbite circulaire basse ($r \simeq R_T$) autour de la Terre, dans un plan contenant l'axe Terre-Lune. Les moteurs du troisième étage sont alors allumés pendant une durée très courte : la vitesse de la fusée passe quasi instantanément de la vitesse v_0 à la vitesse v_1 , de telle sorte que la nouvelle trajectoire soit elliptique de grand axe $2a \simeq d_{TL}$, où d_{TL} représente la distance Terre-Lune.

10. Exprimer l'énergie mécanique E_{m1} de la fusée lorsqu'elle suit cette nouvelle trajectoire.
11. En déduire l'expression de la vitesse v_1 . Application numérique. On donne $d_{TL} = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$.
12. Où est placée la Terre par rapport à cette ellipse? À quel instant doit-on allumer les moteurs? Faire un schéma.
13. Déterminer la durée t_1 du transfert Terre-Lune. Application numérique.

Orbite lunaire

Au voisinage de la Lune, de rayon R_L et de masse m_L , l'attraction de la Lune devient prépondérante et l'attraction de la Terre devient négligeable.

L'étude se fait désormais dans le référentiel lunocentrique, supposé galiléen.

Les paramètres du vol sont calculés pour qu'en cas de panne des moteurs, la fusée contourne la Lune pour revenir sur la Terre (ce fut le cas lors de la mission Apollo XIII). À l'approche de la Lune, les moteurs de la fusée sont rallumés, de façon à placer la fusée sur une orbite circulaire basse ($r \simeq R_L$) autour de la Lune.

14. Faut-il freiner ou accélérer? Justifier qualitativement.
15. Déterminer numériquement v_2 , vitesse associée à une orbite circulaire basse autour de la Lune, avec $\mathcal{G} \times m_L = 4,90 \cdot 10^{12} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ et $R_L = 1,74 \cdot 10^3 \text{ km}$.

2.2 Atmosphère lunaire

L'atmosphère lunaire est majoritairement composée d'atomes d'argon (masse molaire M), libérés lors des réactions nucléaires au sein des roches lunaires. Les molécules de ce gaz sont homocinétiques, c'est-à-dire de vecteur vitesse \vec{v} de norme v constante, mais d'orientation aléatoire.

16. Exprimer v en fonction de R , M et T . Calculer v pour $T = 300 \text{ K}$.
On donne $M = 39,9 \text{ g mol}^{-1}$ et $R \simeq 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.
17. On note v_{lib} la vitesse de libération lunaire; c'est la vitesse minimale d'un objet pouvant échapper à l'attraction gravitationnelle lunaire. Exprimer la vitesse de libération lunaire en fonction de \mathcal{G} , R_L et m_L . Calculer v_{lib} et comparer à v .

Exercice 2 : TRANSFORMATION CYCLIQUE D'UN GAZ PARFAIT

On considère n moles de gaz parfait monoatomique enfermé dans un cylindre fermé par un piston mobile. Initialement, le volume du cylindre est V_1 , la pression du gaz est P_1 et sa température T_1 , c'est l'état 1. Le cylindre est en contact thermique avec un réservoir d'eau à la température T_1 . Dans toute la première partie, le réservoir d'eau est considéré comme un thermostat.

Le gaz subit la série de transformations suivante :

- Compression adiabatique quasistatique jusqu'au volume $V_2 < V_1$: état 2;
- Refroidissement isochore pour revenir à la température T_1 du thermostat : état 3;
- Détente isotherme quasistatique pour revenir à l'état 1.

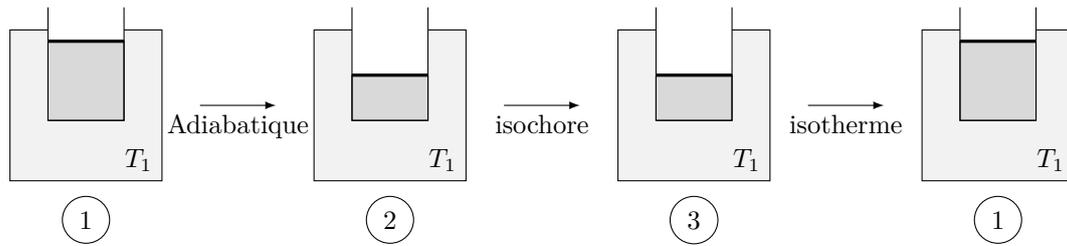


FIGURE 1 – Étapes successives de la transformation étudiée.

- Rappeler le premier principe de la thermodynamique pour un système au repos.
- Qu'est-ce qu'une transformation adiabatique, en pratique quelles sont les transformations que l'on pourra considérer comme adiabatiques ?
- Qu'est-ce qu'une transformation isotherme, en pratique quelles sont les transformations que l'on pourra considérer comme isothermes ?
- Exprimer la pression P_2 atteinte par le gaz dans l'état 2 en fonction de P_1 , V_1 et V_2 .
- En déduire l'expression de la température T_2 atteinte par le gaz dans l'état 2 en fonction de T_1 , V_1 et V_2 .
- Représenter les transformations subies par le gaz dans un diagramme (P, V) .
- Montrer que le travail des forces de pression reçu par le gaz lors de la transformation 1→2 vaut :

$$W_{12} = \frac{3}{2}P_1V_1 \left(\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right)$$

- Que vaut le travail W_{23} reçu par le système lors de la transformation 2 → 3 ? Exprimer la chaleur Q_{23} reçue par le système au cours de cette transformation en fonction de T_1 et T_2 .
- Exprimer le travail W_{31} et la chaleur Q_{31} reçus par le système au cours de la transformation 3 → 1 en fonction de V_2 et V_1 .
- Montrer qu'au cours d'un cycle, le travail et la chaleur reçus par le système sont :

$$W = P_1V_1 \left[\frac{3}{2} \left(\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right) - \ln \frac{V_1}{V_2} \right] \quad \text{et} \quad Q = -W$$

- Quel est le signe de W ? Quel est le signe de Q ? On pourra donner un argument physique, ou étudier mathématiquement le signe de W et Q .
- Expliquer qualitativement ce qu'il va se passer avec l'eau du réservoir lorsqu'on effectue un grand nombre de cycles identiques. Pourra-t-on toujours le considérer comme un thermostat ?