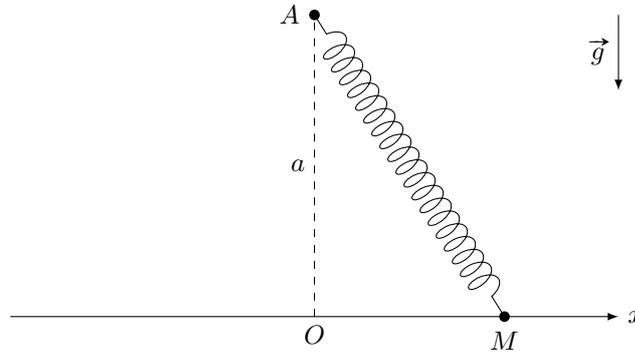


DM7 : Dynamique et chimie

Le travail en groupe est fortement encouragé, vous pouvez rendre une copie par groupe de 3. Attention, tous les membres du groupe doivent avoir fait tout le DM ! Il ne s'agit pas de partager le travail.

Exercice 1 : OSCILLATEUR DE LANDAU



1. L'énergie potentielle est la somme de l'énergie potentielle élastique et de l'énergie potentielle de pesanteur. Comme l'altitude de l'anneau est constante, son énergie potentielle est constante et on peut la choisir nulle. Il ne reste plus que l'énergie potentielle élastique et on a

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{a^2 + x^2} - l_0\right)^2 \quad (1)$$

2. — Lorsque la longueur à vide du ressort l_0 est plus petite que a , le ressort va adopter la configuration où sa longueur est la plus courte possible. Il n'y aura qu'une position d'équilibre en $x = 0$.
 — Lorsque la longueur à vide du ressort est supérieure à a , il existe toujours une position d'équilibre en x_0 (qui devient instable) car en ce point, les forces subies par l'anneau sont verticales. Il y a en plus deux autres positions d'équilibre lorsque sa longueur du ressort vaut l_0 . On aura donc dans ce cas

$$x = \pm\sqrt{l_0^2 - a^2} \quad (2)$$

3. On cherche les points où la dérivée de l'énergie potentielle s'annule :

$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{a^2 + x^2} - l_0\right)^2 \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} = 0 \quad (3)$$

On a donc les solutions suivantes

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \pm\sqrt{l_0^2 - a^2} \quad (4)$$

4. Il faut déterminer le signe de $\frac{d^2E_p}{dx^2}$. Le calcul fait à la question précédente montre que

$$\frac{dE_p}{dx} = kx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) \quad (5)$$

En dérivant une nouvelle fois, on obtient

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = k \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) + \frac{kl_0x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}^3} \quad (6)$$

- Pour la position d'équilibre en $x = 0$, on a

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}(0) = k \left(1 - \frac{l_0}{a}\right) \quad (7)$$

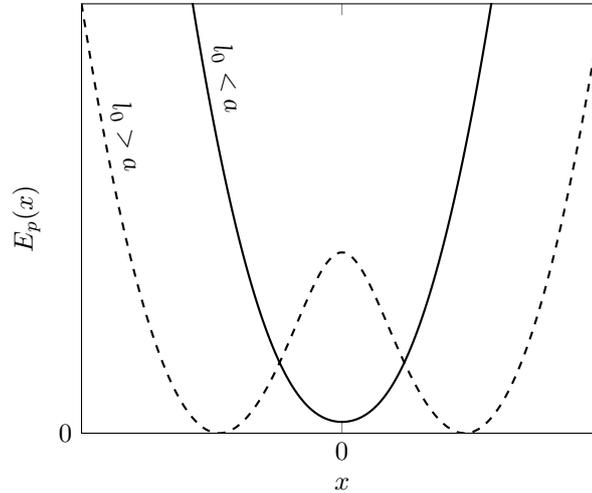
Donc la position d'équilibre est stable lorsque $a > l_0$ et instable lorsque $a < l_0$.

— Pour les deux positions d'équilibres en $x_{\pm} = \pm\sqrt{l_0^2 - a^2}$, on trouve

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{\pm}) = k \frac{x_{\pm}^2}{l_0^2} > 0 \quad (8)$$

et on montre que ces positions d'équilibre sont stables.

5. On trace sur le graphique si dessous l'allure de $E_p(x)$ pour $a > l_0$ et pour $a < l_0$.



6. Lorsque $l_0 < a$, la position d'équilibre stable se trouve en $x = 0$. Pour trouver la pulsation des oscillations, on reprend l'expression de $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(0)$ (équation 7) :

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2}(0) = k \left(1 - \frac{l_0}{a}\right) \quad (9)$$

Et on a (voir cours)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{d^2 E_p}{dx^2}(0)} = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{a}\right)} \quad (10)$$

7. Lorsque $l_0 \ll a$, ω_0 tend vers la valeurs

$$\omega_l = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (11)$$

8. Lorsque $l_0 > a$, les positions d'équilibre stables sont les x_{\pm} définis à la question 4. Et on reprend l'expression de $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{\pm})$ (équation 8) :

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{\pm}) = k \frac{x_{\pm}^2}{l_0^2} = k \left(1 - \frac{a^2}{l_0^2}\right) \quad (12)$$

Et comme à la question précédente, on trouve

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{a^2}{l_0^2}\right)} \quad (13)$$

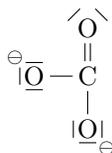
9. Lorsque $l_0 \gg a$, on retrouve que la pulsation des oscillations tend vers

$$\omega_l = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (14)$$

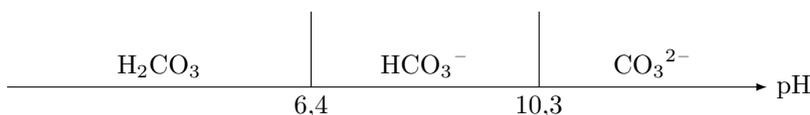
On pouvait s'attendre à ce résultat, car lorsque l_0 est très grande, les positions d'équilibre se trouvent très loin de l'origine sur l'axe x et le ressort est presque horizontal et les oscillations se font *dans l'axe* du ressort. C'est un cas très simple d'oscillateur mécanique pour lequel on a déjà montré plusieurs fois que la pulsation des oscillations est $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Exercice 2 : L'ION CARBONATE

1. Représentation de Lewis :



2. Diagramme de prédominance :



L'ion hydrogénocarbonate peut se comporter comme un acide ou comme une base, c'est une espèce amphotère.

3. La réaction de dosage est :



La constante d'équilibre de cette réaction est $K = \frac{1}{K_{a3}} = 10^{10,3}$. La constante d'équilibre est très supérieure à 10^4 , donc la réaction est totale, et c'est ce que l'on recherche pour une réaction de titrage.

4. L'ion carbonate est une dibase, il y a deux réactions successives au cours du titrage :



La deuxième réaction est également totale puisque sa constante d'équilibre vaut $\frac{1}{K_{a1}} = 10^{6,4}$. On observe donc deux sauts de pH.

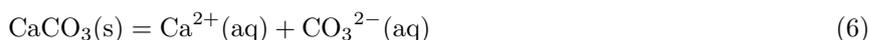
5. À la première équivalence, les réactifs ont été introduits dans les proportions stoechiométriques :

$$n(\text{CO}_3^{2-})_{\text{titré}} = n(\text{H}_3\text{O}^+)_{\text{versé}} \quad (4)$$

$$C_i V_i = C_a V_1 \quad (5)$$

Soit : $C_i = \frac{C_a V_1}{V_i}$ Application numérique : $C_i = 8,4 \cdot 10^{-2} \text{ mol } \ell^{-1}$

6. Dissolution du carbonate de calcium dans l'eau :



7. Pour la solution saturée, on a $s = [\text{CO}_3^{2-}] = [\text{Ca}^{2+}]$.

Le produit de solubilité est vérifié : $K_s = \frac{[\text{CO}_3^{2-}][\text{Ca}^{2+}]}{c^{\circ 2}} = \frac{s^2}{c^{\circ 2}}$

$$s = c^{\circ} \sqrt{K_s} = 6,3 \cdot 10^{-5} \text{ mol } \ell^{-1} \quad (7)$$

8. Établissons un tableau d'avancement volumique dans ce cas :

	CaCO ₃ ²⁻	=	Ca ²⁺	+	CO ₃ ²⁻
État initial	c_0		c		0
État final	$c_0 - s'$		$c + s'$		s'

Le produit de solubilité s'écrit maintenant : $K_s = \frac{s'(c+s')}{c^{\circ 2}}$

La résolution numérique à la calculatrice donne : $s' = 4,0 \cdot 10^{-7} \text{ mol } \ell^{-1}$.

La solubilité s' du carbonate de calcium dans une solution qui contient déjà des ions calcium est inférieure à celle du carbonate de calcium dans l'eau pure : c'est l'effet d'ion commun.

9. En considérant les propriétés basiques de l'ion carbonate, il faut maintenant prendre en compte aussi les espèces HCO₃⁻ et H₂CO₃ car une partie des CO₃²⁻ va se transformer en une de ces espèces. La solubilité du carbonate de calcium correspond désormais à la somme des concentrations des différentes espèces carbonatées.

10.

$$s = [\text{CO}_3^{2-}] + [\text{HCO}_3^-] + [\text{H}_2\text{CO}_3] \quad (8)$$

$$s = [\text{CO}_3^{2-}] \left(1 + \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{c^\circ K_{a2}} + \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]^2}{c^\circ{}^2 K_{a1} K_{a2}} \right) \quad (9)$$

De plus, on a :

$$[\text{CO}_3^{2-}] = \frac{c^\circ{}^2 K_s}{[\text{Ca}^{2+}]} = \frac{c^\circ{}^2 K_s}{s} \quad (10)$$

On obtient :

$$s^2 = c^\circ{}^2 K_s + \frac{K_s c^\circ}{K_{a2}} [\text{H}_3\text{O}^+] + \frac{K_s}{K_{a1} K_{a2}} [\text{H}_3\text{O}^+]^2 \quad (11)$$

En identifiant : $A = c^\circ{}^2 K_s$, $B = \frac{K_s c^\circ}{K_{a2}}$ et $C = \frac{K_s}{K_{a1} K_{a2}}$.