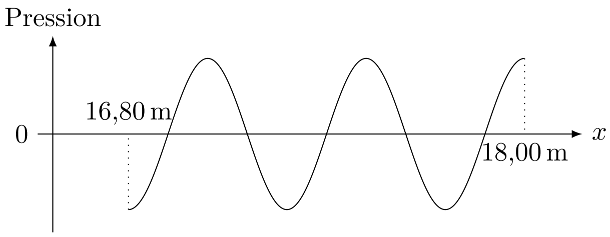
DM6 : Ondes, cinématique, dynamique

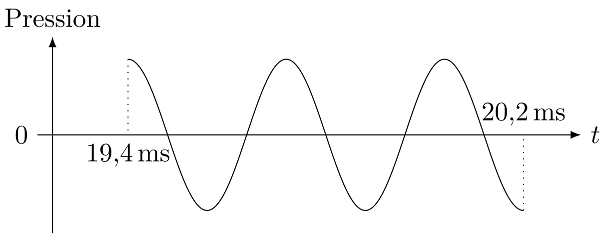
Exercice 1 : Mirages acoustiques

1 Principe du sonar

1. Un sonar émet une onde sonore qui est en partie réfléchie par un obstacle qu'elle rencontre. En mesurant le temps séparant l'émission de l'onde de l'écho reçu le sonar peut détermier la distance qui le sépare de l'obstacle.
2. La distance L est donnée par $2L = c_{\text{mer}}\Delta t_e$, soit $L \simeq 29{,}1\,\text{m}$
3. L'onde émise comporte 2,5 périodes et dure 800 µs. La durée d'une période est donc $T = 3{,}20 \cdot 10^{-4}\,\text{s}$, et la fréquence est $f = 1/T = 3{,}12\,\text{kHz}$
4. La longueur spatiale Δx de l'impulsion est $\Delta x = c_{\text{mer}}\Delta t_i = 1{,}20\,\text{m}$.
5. À $t = 12{,}0\,\text{ms}$, le début de l'onde (la partie émise en premier) se trouve en $x_1 = t\,c_{\text{mer}} = 18{,}00\,\text{m}$ et la fin de l'onde se trouve en $x_2 = x_1 - \Delta x = 16{,}80\,\text{m}$. L'onde est représentée sur la figure ci-dessous.



6. Le détecteur placé sur le second sous-marin recevra l'onde émise par le premier avec un retard $\Delta t_p = L/c_{\text{mer}} = 19{,}4\,\text{ms}$ dû à la propagation de l'onde. La fin de l'onde est reçue 800 µs plus tard, soit à $t_f = 20{,}2\,\text{ms}$. L'onde reçue est représentée sur la figure ci-dessous.



2 Son et température

7. À la température $T_0 = 298\,\text{K}$, on a $c_0 = 347{,}0\,\text{m/s}$.
8. Lorsque la température augmente de 1 K, la vitesse du son vaut $c_1 = 347{,}6\,\text{m/s}$, et la variation de vitesse est donc $\Delta c = 0{,}6\,\text{m/s}$.

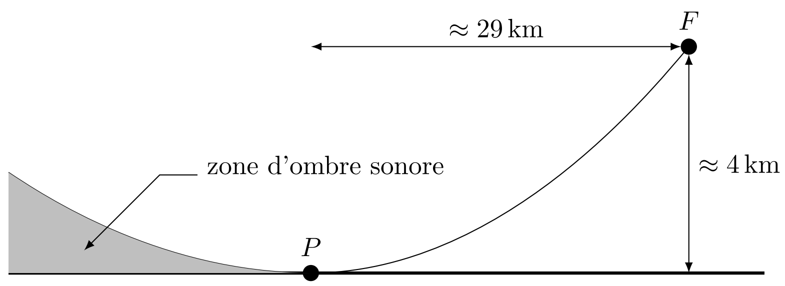
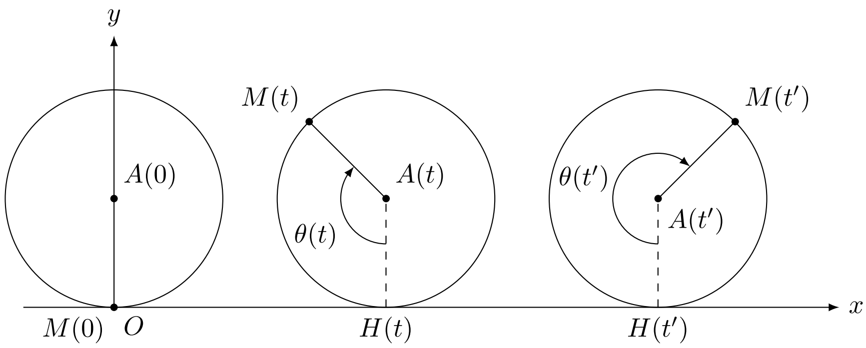


Figure 1 – Un orage silencieux. On représente la position d'une personne P et de la foudre F.

9. On a représenté sur la figure 1 l'allure de la trajectoire du son du tonnerre, dans le cas où il est à la limite d'être perçu par l'homme ainsi que la zone d'«ombre sonore», correspondant aux lieux où le tonnerre n'est pas perceptible. On appelle cela un mirage acoustique car comme pour les mirages optiques, le son ne se déplace pas en ligne droite et semble venir d'un endroit différent de sa source réelle.

Exercice 2 : La cycloïde

I. **Equations paramétriques cartésiennes du mouvement.**

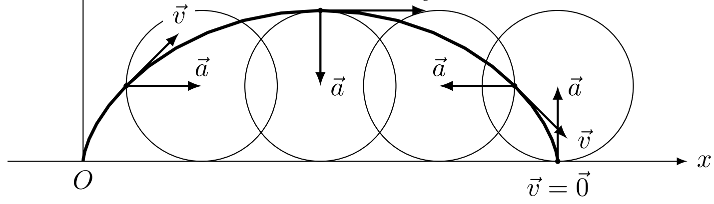


On souhaite déterminer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point M en fonction du paramètre θ. Le mouvement du point M est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au repère (Oxy).

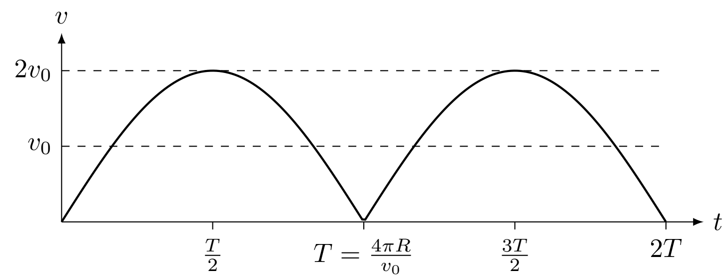
1. Comme la roue roule sans glisser sur le sol, la distance parcourue est égale à la longueur de l'arc de cercle compris entre $M(t)$ et $H(t)$, soit $\overline{OH} = R\theta(t)$.
2. En projetant le vecteur $\overrightarrow{AM}$ sur les axes Ox et Oy on obtient $\overrightarrow{AM} = -R\sin(\theta)\vec{u}_x - R\cos(\theta)\vec{u}_y$.
3. On décompose le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AM}$. Or on a déja vu que $\overrightarrow{OH} = R\theta(t)\vec{u}_x$, on voit clairement sur le schéma que $\overrightarrow{HA} = R\vec{u}_y$ et on a trouvé $\overrightarrow{AM}$ à la question précédente. En additionnant les trois on obtient :
$$\overrightarrow{OM}(t) = [R\theta(t) - R\sin(\theta)]\,\vec{u}_x + [R - R\cos(\theta)]\,\vec{u}_y$$
Ce qui correspond bien aux équations demandées.

II. **Vecteur vitesse.**

4. La vitesse du point A est la même que celle du point H et est constante. On a $\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OH}}{dt} = v_0\vec{u}_x$. Or d'après la question I..1, $\frac{d\overrightarrow{OH}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{u}_x$. La vitesse de rotation $\dot{\theta}$ est donc constante est vaut $\dot{\theta} = \frac{v_0}{R}$.
5. Comme la distance AM est fixe égale à R, le mouvement est circulaire. En outre on vient de montrer que la vitesse de rotation est constante. Le mouvement est donc également uniforme.
6. Les composantes du vecteur vitesse s'obtiennent par dérivation de celles du vecteur position, on obtient :
$$\begin{cases} v_x(t) = R\dot{\theta}(t)\,[1 - \cos\theta(t)] \\ v_y(t) = R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) \end{cases}$$
7. Schéma :



8. La norme v de $\vec{v}$ est : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\dot{\theta}\sqrt{\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2}$ soit $\boxed{v = v_0\sqrt{2 - 2\cos\theta}}$
9. On a $1 - \cos\theta = 1 - \cos 2\frac{\theta}{2} = 1 - (\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}) = 1 - \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$
L'expression précédente se simplifie alors en $\boxed{v = 2v_0\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$



III. **Vecteur accélération.**

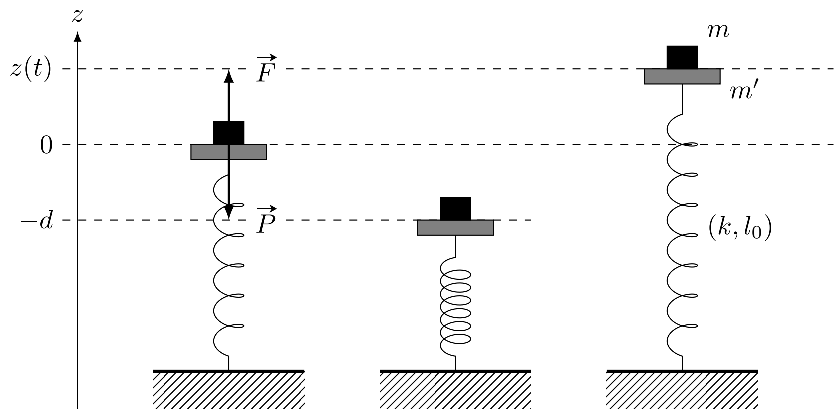
10. On obtient les composantes du vecteur accélération en dérivant celles du vecteur vitesse, on obtient :

$$\begin{cases} a_x = R\dot{\theta}^2 \sin\theta \\ a_y = R\dot{\theta}^2 \cos\theta \end{cases}$$

11. Voir schéma précédent.
12. La norme de v augmente pour $\theta \in [0, \pi]$ et elle diminue pour $\theta \in [\pi, 2\pi]$
13. Le point correspondant à $\theta_4 = 2\pi$ est un *point de rebroussement*, la vitesse de M est nulle alors que l'accélération ne l'est pas.
14. La norme a du vecteur accélération vaut $a = R\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R}$ et est donc constante. Pour le pneu en question elle vaut : $a \simeq 3700\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
15. On peut exprimer le vecteur $\vec{a}$ comme $\vec{a} = -\dot{\theta}^2\overrightarrow{AM} = \dot{\theta}^2\overrightarrow{MA}$. Le vecteur $\vec{a}$ est donc effectivement toujours dirigé de M vers A.

Exercice 3 : Décollement d'une masse

1. Les forces qui s'exercent sur le système sont :
   — Le poids $\vec{P} = (m + m')\vec{g}$;
   — La force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_z$



2. Lorsque la masse est à l'équilibre, on a $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$, en projetant cette équation sur l'axe (Oz) on obtient $-(m + m')g - k(l_{\text{eq}} - l_0) = 0$ donc

$$\boxed{l_{\text{eq}} = l_0 - \frac{(m + m')g}{k} = l_0 - \frac{Mg}{k}} \qquad (1)$$

avec $M = m + m'$.

3. On applique le PFD à l'ensemble {masse+plateau}, on obtient : $\vec{F} + \vec{P} = M\vec{a}$ qui devient après projection sur l'axe z

$$-k(l - l_0) - Mg = M\ddot{z}$$

Or la longueur l du ressort est reliée à z par $l = l_{eq} + z$. On obtient donc l'équation

$$-k(l_{eq} + z - l_0) - Mg = M\ddot{z} \quad \text{soit} \quad \ddot{z} + \frac{k}{M}z = 0$$

4. C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique dont la solution est $z(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$. On trouve A et φ avec les conditions initiales $z(0) = -d$ et $\dot{z}(0) = 0$, qui donnent $A = -d$ et $\varphi = 0$. Donc on a bien

$$\boxed{z(t) = -d\cos(\omega_0 t)} \tag{2}$$

5. Les forces appliquées à la masse m sont : son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force $\vec{R}$ exercée par le plateau. Le PFD donne $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ soit en projection sur l'axe $(0z)$: $-mg + R = m\ddot{z} = md\omega_0^2\cos(\omega_0 t)$. Donc

$$\boxed{R(t) = mg + md\omega_0^2\cos(\omega_0 t)} \tag{3}$$

6. La masse reste en contact avec le plateau tant que R>0, or R ne s'annulera jamais si $md\omega_0^2 < mg$ soit $d < \frac{g}{\omega_0^2}$. On a donc

$$\boxed{d_{\text{lim}} = \frac{g}{\omega_0^2}} \tag{4}$$

7. La masse décolle du plateau lorsque $R = 0$, soit lorsque $\cos(\omega_0 t) = -\frac{g}{d\omega_0^2}$. En utilisant l'expression précédente de $z(t)$ on obtient bien $z_d = \frac{g}{\omega_0^2}$. La longueur du ressort à cet instant est donnée par $l_d = l_{\text{eq}} + z_d = l_0 - \frac{Mg}{k} + \frac{g}{\omega_0^2}$. En remplaçant ω_0^2 par $\frac{k}{M}$, on montre que $l_d = l_0$. La longueur du ressort est sa longueur à vide.
8. Le temps t_d auquel la masse quitte le plateau est solution de l'équation $-d\cos(\omega_0 t_d) = \frac{g}{\omega_0^2} = d_{\text{lim}}$.
   - Si $d \approx d_{\text{lim}}$: $\cos(\omega_0 t_d) \approx -1$ et $t_d \approx \frac{\pi}{\omega_0}$, soit $t_d \approx \frac{T_0}{2}$. La masse quitte le plateau au sommet de la trajectoire juste avant que le plateau ne redescende.
   - Si $d \gg d_{\text{lim}}$: $\cos(\omega_0 t_d) \approx 0$ et $t_d \approx \frac{\pi}{2\omega_0}$, soit $t_d \approx \frac{T_0}{4}$. La masse quitte le plateau au moment où il passe par sa position d'équilibre.
9. La vitesse de la masse suivant l'axe (Oz) est $\dot{z}(t) = d\omega_0\sin(\omega_0 t)$. Or comme $\sin(\omega_0 t) = \sqrt{1 - \cos^2(\omega_0 t)}$, on a

$$\boxed{v_d = d\omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{g}{d\omega_0^2}\right)^2}} \tag{5}$$