DM6 : Ondes, cinématique, dynamique

Le travail en groupe est fortement encouragé, vous pouvez rendre une copie par groupe de 3. Attention, tous les membres du groupe doivent avoir fait tout le DM ! Il ne s'agit pas de partager le travail.

Exercice 1 : Mirages acoustiques

Ce problème s'attache à expliquer le phénomène de mirages acoustiques. Les citations (en italique dans le texte) sont extraites du chapitre «Mirages acoustiques» de l'ouvrage Les Lois du monde de R. Lehoucq, J.-M. Courty et É. Kierlik, Éditions Belin, 2003.

"En choisissant leur profondeur de plongée, les baleines parviennent à se faire entendre à des milliers de kilomètres et les sous-mariniers à se dissimuler des sonars. Les cétacés, comme les sous-marins, exploitent pour cela l'équivalent acoustique des mirages lumineux. Pour expliquer comment, nous allons d'abord décrire la propagation du son, puis nous montrerons que les mirages acoustiques sont une des multiples manifestations d'un même phénomène : la déviation des ondes sonores vers les zones où leur vitesse de propagation est la plus faible."

1 Principe du sonar

Un sonar (*SOund NAvigation and Ranging*) est un dispositif de détection utilisant les ondes acoustiques comme signal détectant. Il permet aux marins de naviguer correctement (mesure de la profondeur) ou aux sous-mariniers de repérer les obstacles et les autres navires. Certains animaux (chauve-souris, dauphins...) utilisent des systèmes similaires au sonar pour repérer leurs proies ou des obstacles.

On suppose dans cette partie que la mer est un milieu homogène dans lequel le son se propage rectilignement. À 20 °C, la vitesse du son dans l'eau de mer est $c_{\text{mer}} = 1{,}50\,\text{km}\,\text{s}^{-1}$.

L'avant d'un sous-marin est équipé d'un sonar lui permettant d'éviter d'entrer en collision avec un autre sous-marin. Le sonar est constitué d'un émetteur d'ondes sonores et d'un récepteur capable d'identifier l'écho de l'onde précédemment émise.

On note O l'avant du sous-marin équipé du sonar et (Ox) l'axe du sous-marin, correspondant à l'axe de propagation de l'onde sonore. Un second sous-marin est à la distance L du premier, dans la configuration représentée sur la figure 1.

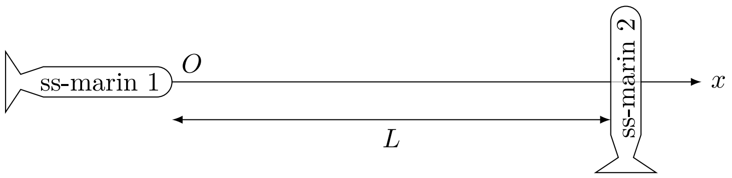


Figure 1 – Les sous-marins, vus de dessus

1. Expliquer le principe de fonctionnement d'un sonar.
2. L'émetteur produit une très brève impulsion sonore. Le récepteur en reçoit l'écho au bout d'une durée $\Delta t_e = 38{,}8\,\text{ms}$. En déduire la distance L à laquelle se situe le second sous-marin ; faire l'application numérique.

À partir de l'instant $t = 0$, le sonar émet l'impulsion sonore sinusoïdale de la figure 2, pendant une durée $\Delta t_i = 800\,\mu\text{s}$.

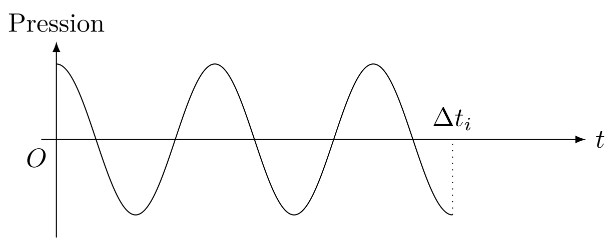


Figure 2 – Impulsion sinusoïdale correspondant au signal envoyé par le sonar

3. Déterminer, en justifiant, la valeur numérique de la fréquence f de l'onde émise par le sonar

   On s'intéresse à la propagation spatiale de l'impulsion sonore : on la représente alors dans le système d'axes de la figure 3.

FIGURE 3 – Propagation spatiale

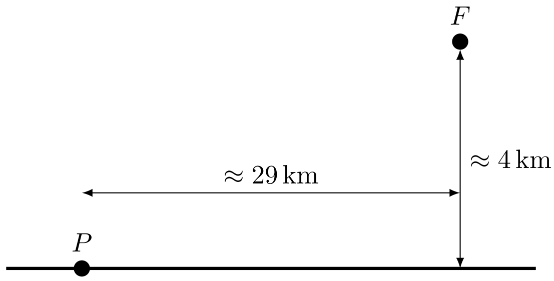


FIGURE 4 – Un orage silencieux. On représente la position d'une personne P et de la foudre F.

4. Exprimer et calculer numériquement la longueur spatiale Δx de l'impulsion.
5. Reproduire sur la copie le système d'axes de la figure 3 et y représenter l'impulsion sonore à l'instant $t = 12{,}0\,\mathrm{ms}$; calculer numériquement, en justifiant précisément, les positions du début (ou front) de l'impulsion et de sa fin.
   Un détecteur d'ondes sonores est placé sur le second sous-marin, sur l'axe (Ox).
6. Représenter sur la copie l'évolution de l'amplitude enregistrée par ce détecteur au cours du temps. Calculer numériquement, en justifiant précisément, les instants auxquels le détecteur reçoit le début et la fin de l'impulsion et on repérera ces instants sur l'axe horizontal qu'on graduera.

2 Son et température

Dans le cas où on assimile l'air à un gaz parfait, la vitesse du son dans l'air est donnée par la formule :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} \tag{1}$$

où $\gamma = 1.41$, $R = 8{,}31\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$, T est la température en kelvin et $M = 29{,}0\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ la masse molaire de l'air (qu'il faut mettre en $\mathrm{kg\,mol^{-1}}$ dans la formule).

"Le son est dévié dans un milieu où sa vitesse de propagation n'est pas uniforme : les trajectoires des ondes sonores s'incurvent vers les zones où la vitesse de propagation est la plus faible. (...) La vitesse du son croît d'environ 0,6 mètre par seconde et par degré Celsius : elle dépend de l'altitude puisque la température change avec cette dernière."

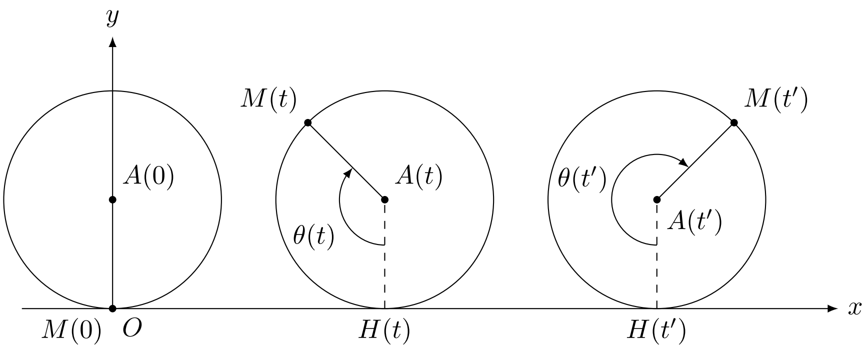
7. Calculer numériquement la vitesse c_0 du son à la température $T_0 = 298\,\mathrm{K}$.
8. Calculer la variation Δc de la vitesse du son lorsque la température varie de $\Delta T = 1\,\mathrm{K}$.
   La déviation des ondes sonores dans l'air dépend du gradient de température. *"Cet effet est amplifié en cas d'orage où l'air au voisinage du sol est très chaud, la température diminuant fortement avec l'altitude."* La déviation *"est alors si importante que l'on n'entend pas le tonnerre d'orages qui éclatent à seulement quelques kilomètres de distance : tout se passe comme si l'on se trouvait dans une zone d'«ombre sonore»."* Ainsi, il se peut qu'on aperçoive un éclair, produit à environ 4 km d'altitude, sans entendre le tonnerre si on est au-delà d'environ 29 km de distance.
9. Reproduire sur la copie la figure 4 et y représenter l'allure de la trajectoire du son du tonnerre, dans le cas où il est à la limite d'être perçu par l'homme. Par analogie avec un mirage optique, justifier le nom de «mirage acoustique» donné au phénomène décrit. Sur la figure 4 reproduite, repérer la zone d'«ombre sonore», correspondant aux lieux où le tonnerre n'est pas perceptible.

Exercice 2 : La cycloïde

La cycloïde est la courbe engendrée par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite. On peut expérimentalement observer cette courbe en observant la trajectoire de la valve d'une roue de vélo.

I. Equations paramétriques cartésiennes du mouvement.

On note M un point donné d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon R roulant sans glissement sur une surface plane. A l'instant initial ($t = 0\,\text{s}$) on suppose que le point M est confondu avec l'origine O d'un repère (Oxy). On note $H(t)$ le projeté orthogonal de A sur l'axe (Ox) **qui dépend du temps car la roue avance**. La position de M à l'instant t est repérée par l'angle orienté $\theta(t) = (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AM})$, le sens positif étant le sens horaire.



On souhaite déterminer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point M en fonction du paramètre θ. Le mouvement du point M est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au repère (Oxy).

1. Démontrer que la distance algébrique $\overline{OH}$ est donnée par la relation $\overline{OH} = R\theta(t)$.
2. Exprimer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AM}(t)$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$, dirigeant les axes Ox et Oy, en fonction de R et de $\theta(t)$.
3. En décomposant judicieusement le vecteur $\overrightarrow{OM}$, montrer que les équations horaires du mouvement s'écrivent sous la forme
$$\begin{cases} x(t) &= R[\theta(t) - \sin\theta(t)] \\ y(t) &= R[1 - \cos\theta(t)] \end{cases}$$

II. Vecteur vitesse.

Afin de simplifier l'étude cinématique, on se limite dans toute la suite au cas où le centre A du cercle $\mathcal{C}$ a un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v_0.

4. En utilisant la relation établie à la question 1, montrer que la vitesse angulaire de rotation $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ est constante. Donner sa valeur en fonction de R et de v_0.
5. Montrer que le mouvement de M dans le référentiel (Axy), de centre A et d'axes Ax et Ay parallèles à Ox et Oy, est circulaire uniforme.
6. Exprimer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ en fonction de R, θ et $\dot{\theta}$.
7. Représenter sur un même schéma la position du cercle $\mathcal{C}$ et la trajectoire de M au cours du temps (la fameuse cycloïde), en dessinant l'allure du vecteur vitesse $\vec{v}$ pour les valeurs suivantes du paramètre θ : $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \pi$, $\theta_3 = \frac{3\pi}{2}$, et $\theta_4 = 2\pi$
8. Déterminer la norme $v = \|\vec{v}(M/\mathcal{R})\|$ de la vitesse de M dans $\mathcal{R}$ en fonction de v_0 et de θ.
9. Démontrer la relation trigonométrique $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\frac{\theta}{2})$. Et l'utiliser pour simplifier l'expression précédente de v. Représenter graphiquement $v(t)$ en indiquant la valeur de v_0 sur le graphique.

III. Vecteur accélération.

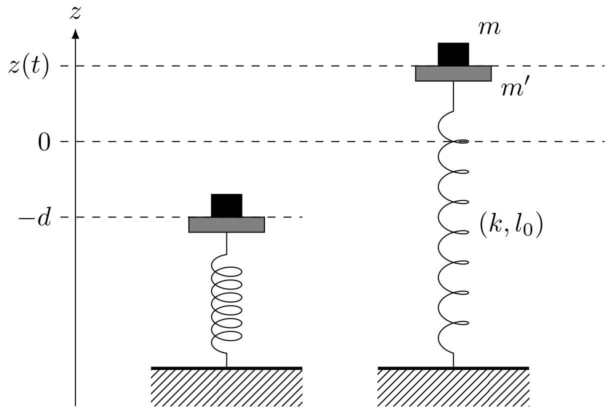
10. Exprimer dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ les composantes du vecteur accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ du point M dans $\mathcal{R}$ en fonction de v_0, R et θ.
11. Sur le dessin de la question 7, représenter l'allure du vecteur accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ pour les valeurs θ_1, θ_2, θ_3 et θ_4.
12. On dit que le point M est accéléré lorsque la norme de sa vitesse augmente. Dans quelles zones le point M est-il accéléré ou décéléré ?
13. En quoi les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ pour $\theta_4 = 2\pi$ présentent-ils un caractère surprenant ?
14. Montrer que la norme $a = \|\vec{a}(M/\mathcal{R})\|$ du vecteur accélération de M dans $\mathcal{R}$ est constante. Calculer sa valeur pour un pneu de voiture de rayon $R = 35\,\text{cm}$ et tel que $v_0 = 130\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$.
15. Montrer que $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ est toujours dirigé de M vers A.

Exercice 3 : Décollement d'une masse

Un point matériel M de masse m est posé sur un plateau horizontal de masse m', lui-même attaché à un ressort vertical de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k.

On suppose que l'ensemble est astreint à se déplacer uniquement suivant la verticale. À l'instant $t = 0$, l'ensemble étant à l'équilibre, on appuie sur le plateau qui se déplace vers le bas d'une distance d, et on le lâche sans vitesse initiale.

On repère la position de la masse et du plateau par la cote $z(t)$ mesurée sur un axe vertical ascendant (Oz) ayant pour origine la position à l'équilibre. On étudie le mouvement du plateau et de la masse dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.



1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le système {masse+plateau}. Faire un schéma.
2. Donner l'expression de la longueur du ressort l_{eq} lorsqu'il se trouve à l'équilibre en fonction de m, m', k g et l_0.
3. On commence par supposer que le contact entre la masse et le plateau est maintenu. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$.
4. Résoudre l'équation différentielle précédente pour montrer que l'altitude $z(t)$ du plateau est donnée par :

$$z(t) = -d\cos(\omega_0 t)$$

   On exprimera ω_0 en fonction de k, m et m'.
5. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse m, exprimer la norme $R(t)$ de la force $\vec{R}(t)$ exercée par le plateau sur la masse m.
6. La masse reste en contact avec le plateau tant que $\vec{R}.\vec{e}_z > 0$. Montrer que la masse reste toujours en contact avec le plateau à condition que la longueur d soit inférieure à une valeur limite d_{lim} dont on donnera l'expression en fonction des données du problème.
7. La condition précédente n'étant pas remplie, montrer que la masse décollera du plateau lorsqu'elle se trouvera à une altitude $z_d = \frac{g}{\omega_0^2}$. Que peut-on dire de la longueur du ressort au moment du décollage ?
8. Donner l'expression du temps t_d auquel la masse décolle du plateau lorsque $d \approx d_{\text{lim}}$ et lorsque $d \gg d_{\text{lim}}$. On donnera la réponse en fonction de la période propre T_0 des oscillations du système {masse+plateau}. Interpréter physiquement ces deux situations.
9. Montrer que la vitesse de la masse suivant l'axe (Oz), au moment où elle quitte le plateau est :

$$v_d = \dot{z}(t_d) = d\omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{g}{d\omega_0^2}\right)^2}$$